

UNIVERSITÉ DE PROVENCE - AIX-MARSEILLE I  
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR :  
MÉCANIQUE, PHYSIQUE, MICRO ET NANOÉLECTRONIQUE (ED 353)

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE AIX-MARSEILLE I

Discipline : Acoustique

Présentée et soutenue publiquement par

**Bastien MALLARONI**

Le 9 Juillet 2010

# **Relation entre la géométrie d'un résonateur de longueur finie et son rayonnement. Étude numérique et expérimentale de ses résonances complexes.**

JURY :	Pr. Jean-Pierre Dalmont	Rapporteur
	Pr. Bernard Laulagnet	Rapporteur
	Dr. René Caussé	Examineur
	Pr. Frédéric Lebon	Examineur
	Dr. Pierre-Olivier Mattei	Directeur de thèse
	Dr. Philippe Herzog	Co-directeur de thèse



*A mon père,*



*"Si le cuivre s'éveille clairon, il n'y a rien de sa faute.  
Cela m'est évident : j'assiste à l'éclosion de ma pensée : je la regarde,  
je l'écoute : je lance un coup d'archet : la symphonie fait son  
remuement dans les profondeurs, ou vient d'un bond sur la scène."  
Rimbaud*



# Remerciements

Pour débiter ce mémoire, je tiens tout d'abord à remercier les personnes sans qui vous ne seriez pas en train de lire ces lignes.

Pour commencer, je tiens à témoigner toute ma gratitude à Pierre-Olivier Mattei qui aura été, pendant ces quatre années, un directeur de thèse exemplaire. Il a su me transmettre sa curiosité et son enthousiasme au quotidien. Dans les moments de doute et de remises en questions, il a toujours su trouver les mots pour me redonner confiance dans mon travail. Son caractère corsé et son sens de l'humour en font un personnage très attachant dont je me souviendrai longtemps.

Je remercie chaleureusement Philippe Herzog, qui en dépit d'une abondance de travail (et c'est un euphémisme...), a toujours suivi mes recherches et a su me conseiller et me guider dans la bonne direction, tout en me laissant une bonne part d'initiatives.

Je suis très reconnaissant envers Jean Kergomard, qui a également beaucoup participé à l'encadrement de ma thèse, pour sa disponibilité et sa sympathie. Je lui dois beaucoup car il a su me donner l'envie de continuer dans l'acoustique après mon stage de Master 2 qu'il a encadré avec Christophe Vergez, durant lequel ils ont fait preuve de beaucoup d'attention. Je suis très reconnaissant envers mon jury (Jean-Pierre Dalmont, Bernard Laulagnet, René Caussé et Frédéric Lebon) qui a accepté de superviser mon travail. J'espère que je serai amené à travailler avec eux dans le futur.

La bonne ambiance au LMA et en particulier chez SACADS a beaucoup participé à mon envie de venir travailler avec plaisir. Je tiens donc à remercier toute l'équipe pour son accueil : Cédric, Sergio, Manu, Dominique, Alain, Muriel, Thierry, Fred, Marie, Régine ainsi que tous les doctorants, post-doc et stagiaires que j'ai eu la chance de croiser : Riccardo, Maxime, Alex, Aurélie, Emmanuelle, Pierre... Merci à Stefan pour la réalisation de mes pavillons qui lui ont donné de polyuréthane à retordre.

Un grand merci à toute l'équipe S2M avec qui j'ai eu de nombreux échanges, notamment autour d'une table bleue : Philippe, Richard, Sølvi, Thierry, Didier ainsi qu'à toute la bande de cuistos musiciens : Mathieu, Jon, Thibaud, Adrien, Charles, Charlie, Samir, Anaïk, Françoise, Pyo, Clément...

La vie hors labo, qui a eu une part importante durant ces quatre années, mérite aussi son lot de remerciements. Commençons par Romain et Fab, mes deux acolytes du LMA avec qui j'ai partagé avec plaisir de nombreuses soirées, voyages, événements sportifs en tout genre, débats, concerts... Merci à Manu et Olive de m'avoir accueilli et abreuvé, à Smurf et à Clément pour ne pas avoir changé depuis 10 ans, à Sandrine pour avoir réussi à ne

pas parler pendant ma soutenance, à Jo pour avoir partagé mon goût pour l'anis, à Fred pour avoir soutenu ma mauvaise foi envers les arbitres, à Nico pour m'avoir fait découvrir les coins cachés de Marseille et à tous les autres pour m'avoir supporté, je pense qu'ils se reconnaîtront.

Un immense merci à Mel, qui, depuis 3 ans, écoute avec attention et empathie mes problèmes de parallélisation en Open MP, d'intégrales divergentes dans le plan complexe, de fréquences propres irrégulières, j'en passe et des meilleurs... Elle a su me remotiver dans les moments délicats et me rendre heureux au quotidien.

Enfin un immense merci à toute ma famille, en particulier à ma mère et à ma soeur qui m'ont toujours suivi et encouragé tout au long de mes études. Une profonde pensée pour mon père qui m'a donné, entre autre, sa passion pour les sciences et qui aurait sûrement pris plaisir à suivre mon travail et à lire ce document.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>Notations utilisées dans le manuscrit</b>	<b>16</b>
<b>1 Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini</b>	<b>21</b>
1.1 Formulation du champ de pression interne . . . . .	22
1.1.1 Mise en équations du problème . . . . .	22
1.1.2 Calcul de la fonction de Green du résonateur par la méthode de l'impédance ramenée . . . . .	26
Sur le point source . . . . .	26
En tous points du résonateur . . . . .	30
1.2 Calcul de l'impédance de rayonnement . . . . .	31
1.2.1 Expression de l'impédance de rayonnement de Zorumski . . . . .	31
1.2.2 Formulation de l'impédance de rayonnement valide pour des fré- quences complexes . . . . .	32
1.2.3 Validation de la nouvelle formulation de l'impédance de rayonnement Fréquences réelles . . . . .	34
Fréquences complexes . . . . .	35
1.3 Calcul des fréquences de résonance . . . . .	35
1.3.1 Présentation de la méthode de Newton . . . . .	37
1.3.2 Résonances du mode plan seul . . . . .	37
1.3.3 Résonances du mode plan avec l'influence des modes de conduits d'ordres supérieurs ( $l \neq 0$ ) . . . . .	40
1.3.4 Résonances des premiers modes non plans ( $n \neq 0$ ) . . . . .	43
1.3.5 Evolution des $j$ premières fréquences de résonance en fonction de la masse volumique du fluide externe . . . . .	46
1.4 Bilan du premier chapitre . . . . .	50
<b>2 Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini</b>	<b>51</b>
2.1 Présentation de la méthode d'éléments finis de frontière utilisée . . . . .	52
2.2 Cas du cylindre de longueur finie . . . . .	56
2.2.1 Limitation due à la taille de la boîte . . . . .	57
2.2.2 Limitation due à la taille des éléments . . . . .	59

2.3	Fréquences de résonance pour différentes géométries . . . . .	63
2.3.1	Pavillon de Bessel . . . . .	63
2.3.2	Etude de l'influence de la forme du pavillon de Bessel sur le rayonnement . . . . .	68
2.3.3	Cas du pavillon conique . . . . .	72
2.4	Méthode hybride entre la théorie modale et les éléments finis de frontière . . . . .	73
2.4.1	Système d'équations utilisé . . . . .	74
2.4.2	Projection sur les modes propres du tuyau . . . . .	75
2.4.3	Impédances à l'entrée d'un cylindre obtenues avec la méthode hybride . . . . .	77
	Avec une boîte parallélépipédique . . . . .	77
	Avec un profil externe suivant le profil interne . . . . .	80
2.4.4	Calcul des fréquences de résonance d'un cylindre à l'aide de $\mathbf{Z}_{\text{BEM}}$ . . . . .	81
2.4.5	Résonateurs avec pavillons . . . . .	84
	Pavillon de Bessel . . . . .	84
	Pavillon conique . . . . .	88
2.5	Bilan du deuxième chapitre . . . . .	90

### 3 Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales 91

3.1	Protocole expérimental . . . . .	92
3.1.1	Dimensions du système pour les différentes configurations . . . . .	92
3.1.2	Choix des matériaux . . . . .	93
3.1.3	Milieu extérieur . . . . .	93
3.1.4	Choix du système source/récepteur . . . . .	94
3.1.5	Positionnement des micros . . . . .	95
3.1.6	Schéma du montage . . . . .	96
3.1.7	Etalonnage du matériel . . . . .	98
	Etalonnage des micros . . . . .	98
	Caractéristiques de la source et de la salle . . . . .	100
3.2	Méthode d'analyse des résultats . . . . .	102
3.2.1	Mesure du $\Delta f/2$ à $-3\text{dB}$ . . . . .	102
3.2.2	Méthode temporelle . . . . .	103
3.2.3	Méthode du cercle de Kennely . . . . .	105
3.3	Cas du résonateur cylindrique . . . . .	109
3.3.1	Mode plan . . . . .	112
3.3.2	Projection de la pression sur les modes propres du conduit . . . . .	113
3.4	Cas du pavillon de Bessel . . . . .	117
3.5	Cas du pavillon conique . . . . .	123
3.6	Bilan du troisième chapitre . . . . .	126

## A Méthode des variables séparées 131

<b>B</b>	<b>Méthode d'impédance ramenée</b>	<b>135</b>
B.1	Condition de Neumann ou de Dirichlet en sortie . . . . .	135
B.2	Cas général . . . . .	136
<b>C</b>	<b>Impédance de rayonnement pour des fréquences réelles</b>	<b>137</b>
C.1	Formulation de Zorumski . . . . .	137
C.2	Ecriture de la matrice impédance de rayonnement . . . . .	140
C.3	Exemples d'impédances de rayonnement . . . . .	141
C.3.1	Impédances directes . . . . .	141
C.3.2	Impédances intermodales . . . . .	143
<b>D</b>	<b>Calculs détaillés de la nouvelle formulation de l'impédance de rayonnement</b>	<b>145</b>
<b>E</b>	<b>Influence des modes d'ordres supérieurs sur l'impédance de rayonnement du mode plan</b>	<b>149</b>
E.1	Fréquences réelles . . . . .	149
E.2	Fréquences complexes . . . . .	153
E.3	Méthode pour l'extension à tout le domaine fréquentiel pour un tuyau de longueur finie . . . . .	159
<b>F</b>	<b>Nouvelle formulation de la correction de longueur de Norris</b>	<b>160</b>
<b>G</b>	<b>Ajout des pertes visco-thermiques</b>	<b>162</b>



# Introduction

L'étude des résonateurs est très répandue en acoustique, notamment dans le domaine musical. En effet, la géométrie interne (la perce) est la caractéristique essentielle de l'instrument quant à son comportement acoustique. La justesse de l'instrument va ainsi dépendre de la géométrie de son résonateur assimilé à une colonne d'air. Il existe donc de nombreuses études dans ce domaine. Citons ici Bernoulli [1], Euler [2] ou d'Alembert [3] qui furent des précurseurs de l'acoustique des instruments de musique au 18<sup>e</sup> siècle, en étudiant notamment les mouvements des colonnes d'air et des cordes. Ils introduirent le fait que plusieurs vibrations simples puissent contribuer simultanément à une vibration complexe, c'est le principe de superposition aboutissant à ce que l'on nomme désormais la décomposition modale. Bernoulli associe notamment la hauteur des sons émis par un tuyau à leurs conditions aux limites. Pour un instrument à vent, nous avons un couplage qui se produit avec le musicien à une extrémité du résonateur qui va constituer la partie excitatrice et un autre couplage à la fin du résonateur avec le milieu extérieur, c'est ce qui correspond au rayonnement. C'est principalement à ce dernier que nous nous sommes intéressé dans notre étude, notamment au lien qu'il peut exister entre le rayonnement d'un résonateur et sa géométrie.

L'ouvrage de Lord Rayleigh [4] à la fin du 19<sup>e</sup> siècle constitue une oeuvre majeure de l'acoustique. Il y introduit notamment le rayonnement d'un piston plan avec un écran infini et le concept de correction de longueur en basses fréquences. Cela consiste à rajouter une longueur proportionnelle au rayon du résonateur afin de décrire l'effet du rayonnement sur les fréquences de résonances du système. Ceci est donc une première approche de la relation existant entre la géométrie du résonateur et son rayonnement. Par la suite, de nombreux auteurs ont étendu ce concept de correction de longueur pour décrire l'influence du rayonnement sur les fréquences de résonance d'un résonateur cylindrique débouchant dans un écran infini comme dans [5] ou [6], ou dans [7] pour un système sans écran. Cette formulation nous donne seulement une information sur le rayonnement du mode plan lorsqu'il est le seul mode propagatif, ce qui est cependant le cas sur quasiment toute la gamme de fréquences de jeu des instruments à vent de par leur faible rayon (clarinette, trompette, ...). Dans notre étude, nous souhaitons dépasser le cadre strictement musical et nous intéresser à tous types de résonateurs. C'est au début des années 70 que Zorumski [8] introduit le concept de matrice impédance de rayonnement pour un cylindre débouchant dans un écran infini, en se basant sur la formulation du rayonnement du piston plan avec écran infini donnée par Rayleigh, généralisée à tous les modes propres du conduit. Cela permet alors de montrer l'influence des modes non plans sur le comportement du système,

même lorsque ces derniers sont évanescents (ne transportent pas d'énergie). La plupart des études dans ce domaine portent sur l'impédance d'entrée d'un cylindre avec écran infini comme dans [9] ou dans [10]. Mais à notre connaissance, aucune étude ne porte sur l'influence de la prise en compte du rayonnement multimodal sur le champ de pression en tout point à l'intérieur d'un résonateur de géométrie plus complexe que le tuyau cylindrique (pavillons, ...). Le but de cette thèse est de développer un outil nous permettant d'étudier le couplage entre 2 milieux dans l'optique d'une optimisation géométrique du rayonnement. Afin de bien visualiser les effets désirés, nous nous sommes intéressés au cas où le couplage est le plus fort : entre le fluide d'un milieu interne et le fluide d'un milieu externe. Pour cela nous allons chercher les fréquences de résonance du système. Elles sont définies dans ce rapport comme étant un outil mathématique correspondant aux singularités du problème. Ces fréquences sont complexes du fait de la perte d'énergie par rayonnement, ainsi leur partie imaginaire nous donne directement une information sur le rayonnement. Cette notion de fréquences complexes se retrouve dans [11] ou dans [12] où la partie imaginaire des fréquences correspond alors aux seules pertes visco-thermiques et non pas au rayonnement. Précisons que les fréquences de résonances ici définies sont souvent appelés dans la littérature fréquences propres complexes. En effet, il est souvent d'usage en acoustique de plutôt définir les résonances comme étant le maximum de la réponse à une excitation forcée, ce qui n'est pas le cas dans notre travail. Pour être tout à fait précis sur cette notation, notons également qu'il serait plus juste de parler de nombres d'onde complexes et non pas de fréquences complexes car la fréquence est une grandeur physique réelle. Mais par abus de langage nous préférons utiliser dans ce rapport le terme de fréquences complexes où la partie imaginaire correspond alors aux pertes du système.

Dans un premier temps nous avons besoin d'un cas de référence pour notre étude. Ainsi, dans le premier chapitre de ce document, nous détaillons la formulation du champ de pression interne d'un résonateur cylindrique de longueur finie débouchant dans un écran infini. Le système étudié peut être schématisé de la manière suivante :

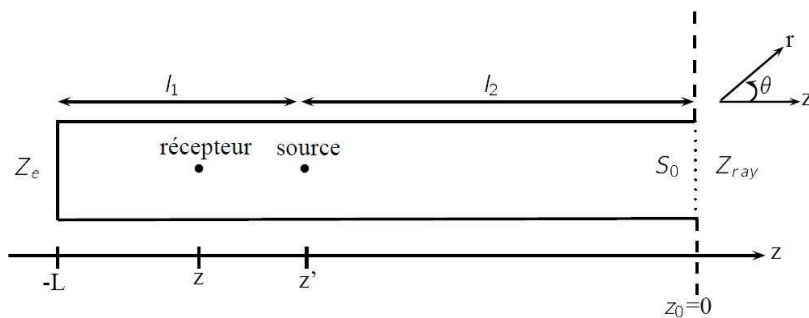


Figure 1 – Résonateur cylindrique de longueur finie débouchant dans un écran infini, étudié dans le premier chapitre.

Dans ce cas, nous connaissons de manière analytique la fonction de Green en champ libre et nous pouvons alors décrire l'influence de la pression externe à l'aide d'une impédance de rayonnement multimodal  $\mathbf{Z}_{\text{ray}}$ . Pour cela nous nous basons sur les travaux de Zorumski dans [8], dont nous étendons le domaine de validité aux fréquences complexes.

La formulation du problème est basée sur une représentation de Green de la pression et la prise en compte des conditions aux limites se fait à l'aide de la méthode des lignes de transmissions (aussi appelée méthode d'impédance ramenée).

Dans ce cas, les fréquences de résonance sont définies comme étant les pôles de la fonction de Green interne. Les valeurs de ces fréquences pour plusieurs modes sont détaillées dans le premier chapitre. Nous y mettons en avant la relation existant entre la prise en compte du rayonnement des différents modes du conduit et la valeur des fréquences de résonance.

Pour des géométries plus complexes que le cylindre de longueur finie, nous n'avons plus accès de manière analytique à la fonction de Green en champ libre. Ainsi, afin d'étudier de telles géométries (tel que des systèmes avec pavillons), nous développons alors une méthode numérique basée sur les éléments finis de frontière (BEM en anglais) que nous avons programmée dans un code Fortran parallélisé. Le système est alors entièrement décrit de manière numérique :

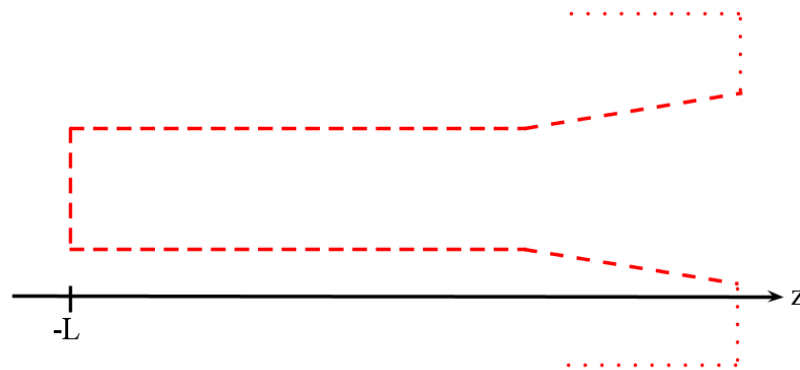


Figure 2 – Système entièrement décrit avec la méthode d'éléments finis de frontières, étudié dans le deuxième chapitre.

Dans le deuxième chapitre nous détaillons le système d'équations utilisé pour une telle méthode. Afin de valider notre modèle numérique, nous comparons les fréquences de résonance obtenues avec la méthode modale développée dans le premier chapitre et celles obtenues avec la méthode BEM dans le cas du cylindre de longueur finie. Cela va nous permettre notamment de mettre en avant l'influence de la taille des éléments sur la précision des résultats de la méthode numérique. Une fois la méthode numérique validée, nous pouvons passer à l'étude de géométries plus complexes. Des premiers résultats sur l'influence de la forme des pavillons sur le rayonnement sont présentés.

## Introduction

---

Lorsque le système est entièrement décrit à l'aide des éléments finis de frontière, le temps de calcul des résonances est alors très important. Nous montrons qu'il augmente très fortement avec le nombre d'éléments considérés. Nous cherchons alors à développer une méthode hybride en utilisant les avantages de la méthode modale (rapidité des calculs) et ceux de la méthode numérique (calcul du rayonnement de géométries complexes). L'idée est de décrire la partie conservative de notre système à l'aide de la méthode modale et la partie rayonnante avec les éléments finis de frontière. Cette méthode peut être schématisée de la manière suivante :

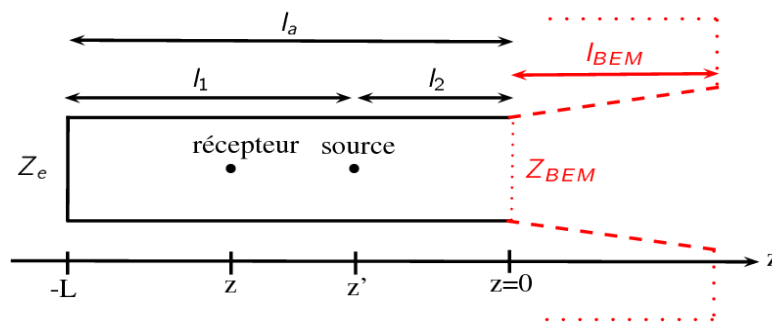


Figure 3 – Système dont la partie cylindrique est décrite par la théorie modale et la partie de géométrie plus complexe par la méthode BEM.

Cette méthode nous permet notamment d'obtenir l'impédance à l'entrée de notre partie décrite avec les éléments finis de frontière (notée  $\mathbf{Z}_{BEM}$  sur la figure précédente) que l'on projette sur les modes propres du résonateur analytique. Nous utilisons ensuite la même méthode d'impédance ramenée que dans le cas analytique, en remplaçant alors l'impédance de rayonnement multimodale  $\mathbf{Z}_{ray}$  par l'impédance  $\mathbf{Z}_{BEM}$  décrivant le rayonnement de la partie décrite numériquement. Dans certaines configurations, cette méthode nous fait gagner un gain de temps considérable par rapport à la méthode où le système est entièrement décrit par la méthode BEM. Notamment lorsque nous avons une grande partie du résonateur cylindrique qui peut alors être décrite de manière analytique avec la méthode hybride.

Le troisième chapitre de ce document présente la confrontation de quelques résultats théoriques avec des mesures des fréquences de résonance complexes dans plusieurs configurations expérimentales, dans le but d'apporter une première validation de notre méthode numérique. Comme dans le cas de la méthode BEM, nous commençons par étudier un résonateur cylindrique de longueur finie afin de valider notre montage expérimental. Puis dans un deuxième temps nous mesurons les résonances obtenues pour un système avec pavillon que nous comparons aux résultats théoriques.

Ce rapport se termine par un bilan du travail présenté et ses possibles perspectives.



# Notations utilisées dans le manuscrit

Notation	Description	Dimension
<b>Général</b>		
$i$	unité imaginaire $i^2 = -1$	
$c$	célérité des ondes acoustiques	$LT^{-1}$
$\omega$	pulsation de l'onde	$radT^{-1}$
$k$	nombre d'onde des ondes acoustiques	$L^{-1}$
$f$	fréquence des ondes acoustiques	$T^{-1}$
$\rho$	masse volumique du fluide	$ML^{-3}$
$\Omega$	domaine d'étude	
$b$	rayon du cylindre	$L$
$r_s$	rayon à la sortie du pavillon	$L$
$r_e$	rayon à l'entrée du pavillon	$L$
$L_p$	longueur du pavillon	$L$
$L_c$	longueur de la partie cylindrique	$L$
$L$	longueur totale du résonateur	$L$
$\nu$	paramètre de forme du pavillon	
$\Sigma$	surface du résonateur	$L^2$
$\Sigma_0$	surface de la source	$L^2$
$V$	volume du système étudié	$L^3$
$V_{ext}$	volume du domaine extérieur au résonateur	$L^3$
$V_0$	volume de la source	$L^3$
$S_0$	section de sortie du cylindre	$L^2$
$S_e$	section à l'entrée du résonateur	$L^2$
$p(M, t)$ et $p(M, \omega)$	champ de pression	$ML^{-1}T^{-2}$
$P(z)$	profil longitudinal de la pression	1
$v(M, t)$ et $v(M, \omega)$	champ de vitesse	$LT^{-1}$
$V(z)$	profil longitudinal de la vitesse	1

## Notations utilisées dans le manuscrit

Notation	Description	Dimension
<b>Méthode modale</b>		
$m, m'$	indices azimuthaux	
$n, l$	indices radiaux	
$M_m$	nombre de $m$	
$N_n$	nombre de $n$	
$\Psi_{mn}(r)$	profil radial de la pression	1
$\tilde{\Psi}_{mn}(kr)$	profil radial de la pression ( <i>Zorumski</i> )	1
$\Phi_{mn}(r, \theta)$	profil de la pression sur le plan $(r, \theta)$	1
$N_{mn}$	facteur de normalisation de $\Phi_{mn}(r, \theta)$	1
$\tilde{N}_{mn}$	facteur de normalisation de $\tilde{\Psi}_{mn}(kr)$ ( <i>Zorumski</i> )	1
$\gamma_{mn}$	$(n+1)^e$ zéro de $J'_m$	
$\lambda_{mn} = \gamma_{mn}/b$	solutions de $J'_m(\lambda_{mn}b) = 0$	$L^{-1}$
$\xi_{mn} = \gamma_{mn}/kb$	solutions de $J'_m(\xi_{mn}kb) = 0$ ( <i>Zorumski</i> )	1
$\tau$ et $\tau'$	variables d'intégration	$L^{-1}$
$\tilde{\tau}$	variable d'intégration ( <i>Zorumski</i> )	1
$D_{mn}(\tau)$	$(b\tau\psi_{mn}(b)J'_m(\tau b))/(\lambda_{mn}^2 - \tau^2)$	$L^2$
$\tilde{D}_{mn}(\tilde{\tau})$	$(kb\tilde{\tau}\tilde{\psi}_{mn}(kb)J'_m(\tilde{\tau}kb))/(\xi_{mn}^2 - \tilde{\tau}^2)$ ( <i>Zorumski</i> )	1
$k_{mn}$	nombre d'onde du mode $mn$	$L^{-1}$
$k_{mn}^j$	$j^{eme}$ nombre d'onde de résonance complexe du mode $mn$ sans rayonnement	$L^{-1}$
$k_{mn,r}^j$	$j^{eme}$ nombre d'onde de résonance complexe du mode $mn$ avec rayonnement	$L^{-1}$
$\zeta_{mn}^j$	facteur de pertes de $k_{mn,r}^j$ ( $\zeta_{mn}^j =  \Im(k_{mn}^j)/\Re(k_{mn}^j) $ )	
$\alpha_j$	équivalent à $k_{00}^j$	$L^{-1}$
$f_{c,mn}$	fréquence de coupure du mode $mn$ ( $f_{c,mn} = (c/2\pi) * \lambda_{mn}/b$ )	$T^{-1}$
$P_{mn}$	amplitude modale de la pression	1
$V_{mn}$	amplitude modale de la vitesse	1
$\Phi(r, \theta)$	vecteur colonne constitué des $\Phi_{mn}$	1
$\mathbf{P}(z)$	vecteur colonne constitué des $P_{mn}$	1
$\mathbf{V}(z)$	vecteur colonne constitué des $V_{mn}$	1
$Z_{c,mn}$	impédance caractéristique du mode $mn$	1
$\mathbf{Zc}$	matrice diagonale constituée des $Z_{c,mn}$	1
$\mathcal{G}(M, M_0, \omega)$	fonction de green en champ libre	$L^{-1}$
$\Gamma(M, M', \omega)$	fonction de green du résonateur cylindrique	$L^{-1}$
$\mathbf{g}(z, z', \omega)$	vecteur colonne constitué des $g_{mn}(z, z', \omega)$	$L^{-1}$
$g_{mn}(z, z', \omega)$	partie longitudinale de $\Gamma(M, M', \omega)$ pour le mode $mn$	$L^{-1}$
$\mathbf{P}'(z = z', \omega)$	vecteur colonne constitué des $g_{mn}(z = z', \omega)$	$L^{-1}$
$\mathbf{V}'(z = z', \omega)$	vecteur colonne constitué des $-\frac{1}{k}\partial_z g_{mn}(z = z', \omega)$	$L^{-1}$
$\mathbf{Z}_e$	matrice impédance d'entrée	1
$\mathbf{Z}_{ray}$	matrice de rayonnement multimodal constituée des $\mathbf{Z}_{mnml}$	1
$\mathbf{Z}^+(z', \omega)$	matrice de transmission dépendant de $\mathbf{Z}_{ray}$	1
$\mathbf{Z}^-(z', \omega)$	matrice de transmission dépendant de $\mathbf{Z}_e$	1

## Notations utilisées dans le manuscrit

Notation	Description	Dimension
<b>Méthode BEM</b>		
$G(M, M')$	fonction de Green du système étudié	$L^{-1}$
$f(M_0)$	densité de la source	$ML^{-3}T^{-2}$
$N_e$	nombre d'éléments utilisés	
$Q_i$	point au centre du $i^{eme}$ élément de coordonnées $(r_i, \theta_i)$	
$S_i$	surface du $i^{eme}$ élément	$L^2$
$\mathbf{S}$	vecteur colonne de taille $N_e$ constitué des $S_i$	$L^2$
$p_i$	pression au centre de l'élément $i$	$ML^{-1}T^{-2}$
$T_i$	dérivée normale de la pression au centre de l'élément $i$	$ML^{-2}T^{-2}$
$f_i$	valeur de $f(M_0)$ au centre de l'élément $i$	$ML^{-3}T^{-2}$
$F_i$	$F_i = f_i \int_{\Sigma_0} G(Q_i, M_0) d\Sigma_0$	$ML^{-1}T^{-2}$
$\mathbf{F}$	vecteur colonne de taille $N_e$ constitué des $F_i$	$ML^{-1}T^{-2}$
$\gamma_i$	fonction caractéristique de la surface $S_i$	1
$\mathbf{D}_1$	matrice carrée $(N_e \times N_e)$ constituée des $D_{1,ij} = \int_{S_j} \frac{\partial G(Q_i, Q')}{\partial n(Q')} d\Sigma_{Q'}$	1
$\mathbf{M}_1$	matrice carrée $(N_e \times N_e)$ constituée des $M_{1,ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} - D_{1,ij}$	1
$\mathbf{M}_2$	matrice carrée $(N_e \times N_e)$ constituée des $M_{2,ij} = \int_{S_j} G(Q_i, Q') d\Sigma_{Q'}$	$L$
$\mathbf{Z}_{N1}$	$\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2$ de taille $N_e \times N_e$	$L$
<b>Méthode hybride</b>		
$p^-(r, \theta)$	pression obtenue avec la méthode modale	$ML^{-1}T^{-2}$
$p^+(r, \theta)$	pression obtenue avec la méthode BEM	$ML^{-1}T^{-2}$
$\hat{p}_i$	pression au centre de l'élément $i$	$ML^{-1}T^{-2}$
$\hat{\mathbf{p}}$	vecteur colonne de taille $N_e$ constitué des $\hat{p}_i$	$ML^{-1}T^{-2}$
$v^-(r, \theta)$	vitesse obtenue avec la méthode modale	$LT^{-1}$
$v^+(r, \theta)$	vitesse obtenue avec la méthode BEM	$LT^{-1}$
$\hat{v}_i$	vitesse au centre de l'élément $i$	$LT^{-1}$
$\hat{\mathbf{v}}$	vecteur colonne de taille $N_e$ constitué des $\hat{v}_i$	$LT^{-1}$
$\nu$	$\nu = (m, n)$	
$N$	$N = M_m \times N_n$	
$\Phi_\nu$	matrice de taille $(N_e \times N_e)$ constituée des $\Phi_\nu(Q_i)$	1
$\mathbf{P}_\nu$	vecteur colonne de taille $N$ constitué des $P_\nu$	1
$\mathbf{V}_\nu$	vecteur colonne de taille $N$ constitué des $V_\nu$	1
$\mathbf{Z}_{BEM}$	matrice de taille $(N \times N)$ décrivant le rayonnement de la partie BEM	1
<b>Méthode expérimentale</b>		
$P_{\mu_{ref}}$	pression mesurée sur le micro de référence	$ML^{-1}T^{-2}$
$P_\mu$	pression mesurée sur un des micros du bouchon	$ML^{-1}T^{-2}$
$I$	intensité envoyée à la source	$I$
$H_1$	$20 \log_{10}(P_\mu / P_{\mu_{ref}})$	19
$H_i$	$20 \log_{10}(P_{\mu_{ref}} / I)$	

## Notations utilisées dans le manuscrit

---

Avec les conventions suivantes pour la notation des dimensions :

Symbole	Signification
$L$	longueur
$T$	temps
$M$	masse
$I$	courant électrique

# Chapitre 1

## Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Formulation du champ de pression interne . . . . .</b>	<b>22</b>
1.1.1	Mise en équations du problème . . . . .	22
1.1.2	Calcul de la fonction de Green du résonateur par la méthode de l'impédance ramenée . . . . .	26
<b>1.2</b>	<b>Calcul de l'impédance de rayonnement . . . . .</b>	<b>31</b>
1.2.1	Expression de l'impédance de rayonnement de Zorumski . . . . .	31
1.2.2	Formulation de l'impédance de rayonnement valide pour des fréquences complexes . . . . .	32
1.2.3	Validation de la nouvelle formulation de l'impédance de rayonnement . . . . .	34
<b>1.3</b>	<b>Calcul des fréquences de résonance . . . . .</b>	<b>35</b>
1.3.1	Présentation de la méthode de Newton . . . . .	37
1.3.2	Résonances du mode plan seul . . . . .	37
1.3.3	Résonances du mode plan avec l'influence des modes de conduits d'ordres supérieurs ( $l \neq 0$ ) . . . . .	40
1.3.4	Résonances des premiers modes non plans ( $n \neq 0$ ) . . . . .	43
1.3.5	Evolution des $j$ premières fréquences de résonance en fonction de la masse volumique du fluide externe . . . . .	46
<b>1.4</b>	<b>Bilan du premier chapitre . . . . .</b>	<b>50</b>

Dans ce premier chapitre nous nous attachons à étudier un cas de référence pour la suite de notre étude. Nous avons choisi le cylindre de longueur finie avec la présence d'un écran infini. Cette première étude va nous permettre de valider notre méthode en utilisant des résultats bien connus dans la littérature (correction de longueur, mode plan) mais aussi d'obtenir des résultats originaux, concernant notamment les modes non plans. Pour décrire le comportement du système nous allons étudier ses fréquences de résonance complexes

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.1 Formulation du champ de pression interne

---

qui sont définis ici comme un outil mathématique correspondant aux pôles complexes de la fonction de Green du résonateur. Nous devons donc tout d'abord définir cette dernière en tenant compte d'une impédance de rayonnement nous permettant de décrire le couplage avec le milieu extérieur.

### 1.1 Formulation du champ de pression interne

L'objet de cette partie est de donner une expression de la pression interne d'un cylindre de longueur finie avec un écran infini avec une condition de rayonnement quelconque. Pour cela, nous utilisons une méthode de séparation de variables ([13] ou [14]) qui nous conduit à une décomposition de la pression sur les parties transversales et longitudinales du conduit. Pour une condition de rayonnement quelconque, la décomposition longitudinale de la pression n'est pas aussi simple qu'avec une condition de Neumann ou de Dirichlet à la sortie du résonateur. Pour la calculer nous utilisons alors une formulation basée sur les fonctions de Green ainsi qu'une méthode d'impédance ramenée dont les différentes étapes de calculs sont ici détaillées.

#### 1.1.1 Mise en équations du problème

Nous considérons ici un problème tridimensionnel, représenté sur la figure 1.1, dans lequel nous définissons le domaine d'étude  $\Omega$  comme un cylindre de rayon  $b$  et de longueur  $L$  débouchant dans espace demi-infini. Le vecteur unité  $\vec{n}$  est la normale extérieure aux parois  $\Sigma$  du conduit. Les coordonnées du point  $M$  interne au domaine de propagation  $\Omega$  sont notées  $(r, \theta, z)$  et celles du point  $M_0$  appartenant à  $S_0$ , la surface de sortie, sont dénotées par  $(r_0, \theta_0, z_0)$ . L'origine des abscisses étant prise à la fin du conduit, nous avons alors  $z_0 = 0$ .

L'équation de propagation hors source s'écrit :

$$(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})p(M, t) = 0. \quad (1.1)$$

Nous considérons les parois  $\Sigma$  de notre cylindre rigides et parfaitement réfléchissantes (condition de Neumann), nous avons ainsi :

$$\frac{\partial p(M)}{\partial n} = 0, \quad \forall M \in \Sigma.$$

En utilisant la méthode des variables séparées présentée dans l'annexe A, les solutions de 1.1 peuvent s'écrire (en omettant la dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ ) :

$$p(r, \theta, z) = \rho c^2 \sum_{m=0}^{M_m} \sum_{n=0}^{N_n} [C_{mn} e^{-ik_{mn}z} + D_{mn} e^{ik_{mn}z}] \Phi_{mn}(r, \theta). \quad (1.2)$$

avec  $M_m$ =nombre de  $m$  (indice azimuthal du mode) et  $N_n$ = nombre de  $n$  (indice radial du mode).

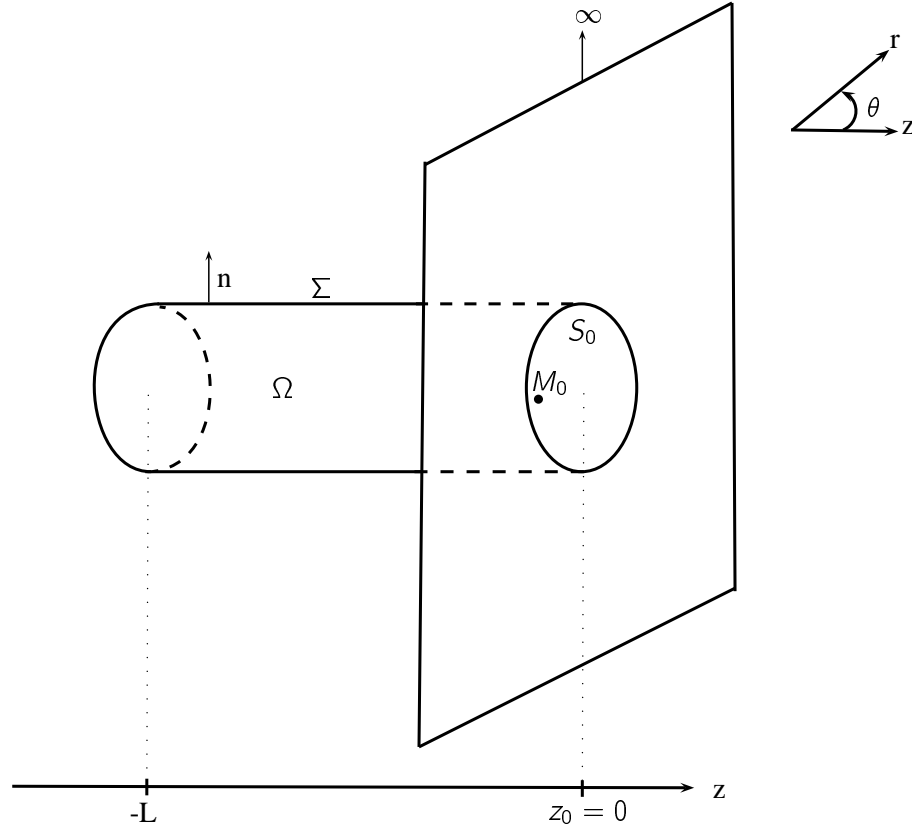


Figure 1.1 – Schéma du système étudié.

$P_{mn}(z) = C_{mn}e^{-ik_{mn}z} + D_{mn}e^{ik_{mn}z}$  est le profil longitudinal de la pression du mode  $mn$  et  $\phi_{mn}(r, \theta) = \frac{J_m(\lambda_{mn}r)}{N_{mn}}e^{im\theta}$  est le profil de la pression sur le plan  $(r, \theta)$  pour le mode  $mn$  (les  $\phi_{mn}(r, \theta)$  sont aussi appelés modes de conduit).

Les  $\lambda_{mn}$  sont solutions de  $J'_m(\lambda_{mn}b) = 0$ , avec  $\lambda_{mn} = \gamma_{mn}/b$ . Les  $\gamma_{mn}$  sont les  $n + 1^{eme}$  zéros de la dérivée première de la fonction de Bessel  $J_m$ .

Avec la condition de normalisation suivante :

$$\int_S \phi_{mn} \phi_{m'n'}^* dS = S \delta_{mm'} \delta_{nn'},$$

où  $S$  est la section droite du cylindre, la norme  $N_{mn}$  est défini telle que (voir annexe A) :

$$N_{mn} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\lambda_{mn}^2 b^2}} J_m(\lambda_{mn}b). \quad (1.3)$$

Rappelons également que nous avons  $k_{mn}^2 = k^2 - \lambda_{mn}^2$  (où  $k_{mn}$  est le nombre d'onde du mode  $mn$ ). De ce fait si  $k^2 > \lambda_{mn}^2$ , le mode  $mn$  est propagatif (transporte de l'énergie)

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.1 Formulation du champ de pression interne

---

et nous avons :

$$k_{mn} = \sqrt{k^2 - \lambda_{mn}^2},$$

et si  $k^2 < \lambda_{mn}^2$ , le mode  $mn$  est évanescent (ne transporte pas d'énergie), nous avons alors :

$$k_{mn} = \pm i \sqrt{\lambda_{mn}^2 - k^2}.$$

Le problème précédent peut être décrit sous forme matricielle. Dans la suite nous prendrons les notations suivantes :

$\Phi(r, \theta)$  est un vecteur colonne constitué par les  $M_m \times N_n$  éléments  $\phi_{mn}$ , tel que

$$\int_S \Phi(r, \theta) \Phi^T(r, \theta) dS = SI.$$

$\mathbf{P}(z)$  est un vecteur colonne constitué des  $M_m \times N_n$  éléments  $P_{mn}$  et  $\mathbf{V}(z)$  est un vecteur colonne constitué des  $M_m \times N_n$  éléments  $V_{mn}$ . Nous avons alors

$$p(r, \theta, z) = \rho c^2 \Phi^T(r, \theta) \mathbf{P}(z),$$

de même, nous avons

$$v(r, \theta, z) = c \Phi^T(r, \theta) \mathbf{V}(z).$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\mathbf{P}(z) = \frac{1}{S \rho c^2} \int_S \Phi(r, \theta) p(r, \theta, z) dS,$$

$$\mathbf{V}(z) = \frac{1}{S c} \int_S \Phi(r, \theta) v(r, \theta, z) dS.$$

Afin que notre formalisme soit le plus général possible, nous allons introduire un point source à l'intérieur de notre résonateur. Pour définir le profil de la pression à l'intérieur du conduit de longueur finie, nous allons alors utiliser une formulation basée sur les fonctions de Green. Cette méthode est souvent utilisée pour décrire la pression acoustique à l'intérieur d'un conduit avec la présence d'une source. Elle est notamment développée dans [15] afin d'obtenir la fonction de Green d'un guide unidimensionnel avec des terminaisons de type impédance pour l'approximation onde plane. Nous allons étendre ces travaux au cas tridimensionnel et nous affranchir de l'approximation onde plane, notamment afin de prendre en compte l'effet des modes de conduits d'ordres supérieurs.

La fonction de Green recherchée  $\Gamma(M, M', \omega)$  exprimée en un point  $M(r, \theta, z)$  avec une source ponctuelle unité en  $M'(r', \theta', z')$ , vérifie :

$$(\Delta_M + k^2) \Gamma(M, M', \omega) = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z'), \quad (1.4)$$

sur les parois nous avons :

$$\partial_n \Gamma(M, M', \omega) = 0.$$



## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.1 Formulation du champ de pression interne

Nous la cherchons sous la forme suivante (avec des conditions aux limites en  $z = 0$  et en  $z = -L$  que nous définirons plus tard) :

$$\Gamma(M, M', \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{mn}(r, \theta) \phi_{mn}(r', \theta') g_{mn}(z, z', \omega). \quad (1.5)$$

Rappelons que :

$$(\Delta_{\perp} + \lambda_{mn}^2) \phi_{mn}(r, \theta) = 0,$$

avec  $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ , d'où :

$$\Delta_{\perp} \phi_{mn}(r, \theta) = -\lambda_{mn}^2 \phi_{mn}(r, \theta),$$

et que :

$$k_{mn}^2 = k^2 - \lambda_{mn}^2.$$

En tronquant la double sommation à un nombre fini de termes  $M_m$  et  $N_n$ , la relation (1.4) peut alors s'écrire :

$$\sum_{m=0}^{M_m} \sum_{n=0}^{N_n} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_{mn}^2 \right) \phi_{mn}(r, \theta) \phi_{mn}(r', \theta') g_{mn}(z, z', \omega) = -\frac{1}{2\pi r} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z') \quad (1.6)$$

En multipliant à gauche et à droite par  $\phi_{m'l}^*(r, \theta)$  et en intégrant sur la surface  $S$ , avec la condition d'orthogonalité des modes (définie par la relation (A.12)), nous obtenons :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_{mn}^2 \right) g_{mn}(z, z', \omega) = -S^{-1} \delta(z - z'). \quad (1.7)$$

Lorsque nous n'avons pas une condition de Neumann ou de Dirichlet en sortie de notre cylindre, nous n'avons plus directement accès à la partie longitudinale de la pression (voir annexe B). Pour cela nous allons utiliser une méthode dite d'impédance ramenée, analogue au formalisme des lignes de transmissions électriques. Cette méthode relie l'impédance d'un guide d'ondes en un point à partir de la donnée de l'impédance en un autre point et de la distance les séparant. Elle est souvent utilisée, notamment dans [9], [15], [16], ou encore dans [17]. Les calculs permettant de mettre en place cette méthode sont détaillés dans l'annexe B.

Nous allons donc chercher à exprimer le vecteur  $\mathbf{g}(z, z')$  (la dépendance en  $\omega$  est omise dans la suite du document pour faciliter l'écriture) en tenant compte des conditions aux limites. Dans un premier temps nous allons calculer le vecteur correspondant à la partie longitudinale de la fonction de Green au point source  $z'$ . Puis dans un second temps, toujours à l'aide de la méthode d'impédance ramenée nous en déduirons le vecteur  $\mathbf{g}(z, z')$  sur le récepteur placé au point  $z$ , ce qui nous permettra d'obtenir la fonction de Green interne  $\Gamma(M, M')$  du résonateur.

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.1 Formulation du champ de pression interne

#### 1.1.2 Calcul de la fonction de Green du résonateur par la méthode de l'impédance ramenée

Avant de commencer, précisons les notations que nous allons utiliser dans cette partie. Nous définissons ainsi

$$P'_{mn}(z_1) = g_{mn}(z_1, z_2)_{z_1=z_2},$$

et

$$V'_{mn}(z_1) = -\frac{1}{k} \partial g_{mn}(z_1, z_2)_{z_1=z_2}.$$

C'est avec ces grandeurs qui ont la dimension de la fonction de Green recherchée (inverse d'une longueur) que nous allons utiliser la méthode d'impédance ramenée.

Pour cela, nous utilisons les coordonnées représentées sur la figure (1.2).

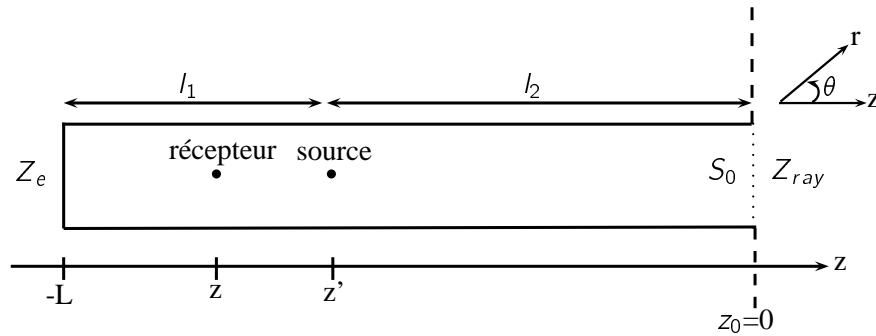


Figure 1.2 – Schéma du conduit avec les coordonnées utilisées.

#### Sur le point source

Commençons par calculer le vecteur  $\mathbf{g}(z, z')$  au point  $z = z'$  noté  $\mathbf{P}'(z')$ , où nous avons placé notre source. Comme nous sommes ici ramené à un problème à 1D il n'y a pas de singularité en  $z = z'$ .

Dans un premier temps nous allons développer les systèmes matriciels utilisés, puis calculer l'impédance  $\mathbf{Z}^+$  au point  $z'$  en fonction de l'impédance de sortie et l'impédance  $\mathbf{Z}^-$  au même point  $z'$  en fonction de l'impédance d'entrée. Les conditions de continuité de la fonction de Green et du saut de sa dérivée nous permettent alors de faire le lien entre ces deux impédances en  $z'$ , afin d'obtenir le vecteur  $\mathbf{P}'(z')$  au point source.

#### Etape 1 : calcul du multiporte

Pour un cylindre, nous avons vu que les solutions générales au point  $z_1$ , peuvent être écrites en fonction des valeurs de P et de V au point  $z_2$  comme suit :

$$\begin{pmatrix} P'_{mn}(z_1) \\ V'_{mn}(z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(ik_{mn}(z_2 - z_1)) & -Z_{c_{mn}} \sinh(ik_{mn}(z_2 - z_1)) \\ -\frac{\sinh(ik_{mn}(z_2 - z_1))}{Z_{c_{mn}}} & \cosh(ik_{mn}(z_2 - z_1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P'_{mn}(z_2) \\ V'_{mn}(z_2) \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

En appliquant la relation 1.8 à tous les modes  $mn$  nous obtenons le problème matriciel suivant :

$$\mathbf{P}'(z_1) = \mathbf{C}\mathbf{P}'(z_2) - \mathbf{Z}_c \mathbf{S} \mathbf{V}'(z_2), \quad (1.9)$$

$$\mathbf{V}'(z_1) = -\mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{S} \mathbf{P}'(z_2) + \mathbf{C} \mathbf{V}'(z_2), \quad (1.10)$$

avec  $\mathbf{C}$  une matrice diagonale constituée des  $\cosh(ik_{mn}(z_2 - z_1))$  et  $\mathbf{S}$  une matrice diagonale constituée des  $\sinh(ik_{mn}(z_2 - z_1))$ .

D'après (1.10), nous avons :

$$\mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{S} \mathbf{P}'(z_2) = -\mathbf{V}'(z_1) + \mathbf{C} \mathbf{V}'(z_2),$$

soit

$$\boxed{\mathbf{P}'(z_2) = -\mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1} \mathbf{V}'(z_1) + \mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{V}'(z_2)}. \quad (1.11)$$

En reportant (1.11) dans (1.9) et en utilisant la commutativité des matrices diagonales, nous obtenons :

$$\mathbf{P}'(z_1) = -\mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{V}'(z_1) + [\mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C} - \mathbf{Z}_c \mathbf{S}] \mathbf{V}'(z_2),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C} - \mathbf{Z}_c \mathbf{S} &= \mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{S} \mathbf{S}) - \mathbf{Z}_c \mathbf{S} \\ &= \mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1} + \mathbf{Z}_c \mathbf{S} - \mathbf{Z}_c \mathbf{S} \\ &= \mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1}, \end{aligned}$$

nous arrivons ainsi à :

$$\boxed{\mathbf{P}'(z_1) = -\mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{V}'(z_1) + \mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1} \mathbf{V}'(z_2)}. \quad (1.12)$$

Remarquons que les résultats obtenus sont bien en accord avec ceux donnés dans [15]. Nous obtenons ainsi la matrice impédance du multiporte :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}'(z_1) \\ \mathbf{P}'(z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11} & -\mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & -\mathbf{Z}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}'(z_1) \\ \mathbf{V}'(z_2) \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.1 Formulation du champ de pression interne

avec  $\mathbf{Z}_{11} = -\mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{Z}_{12} = -\mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1}$ ,  $\mathbf{Z}_{21} = -\mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1}$  et  $\mathbf{Z}_{22} = -\mathbf{Z}_c \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}$ . Remarquons que la symétrie du problème est respectée ( $\mathbf{Z}_{11} = \mathbf{Z}_{22}$ ) ainsi que la réciprocité ( $\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}$ ).

#### Etape 2 : calcul de $\mathbf{Z}^+(z')$

Notons ici  $\mathbf{C}_s$  la matrice diagonale constituée des  $\cosh(ik_{mn}l_2)$  et  $\mathbf{S}_s$  la matrice diagonale constituée des  $\sinh(ik_{mn}l_2)$ , avec  $l_2$  la distance entre l'extrémité et le point  $z'$  où nous souhaitons ramener la matrice de rayonnement  $\mathbf{Z}_{\text{ray}}$ . Celle-ci est définie par la relation  $\mathbf{P}'(z' + l_2) = \mathbf{Z}_{\text{ray}} \mathbf{V}'(z' + l_2)$ , ainsi avec (1.11) nous obtenons :

$$\mathbf{V}'(z' + l_2) = (\mathbf{Z}_{\text{ray}} + \mathbf{Z}_{22})^{-1} \mathbf{Z}_{21} \mathbf{V}'(z'). \quad (1.14)$$

Puis en introduisant (1.14) dans (1.12) :

$$\mathbf{P}'(z') = \mathbf{Z}_{11} \mathbf{V}(z') - \mathbf{Z}_{12} (\mathbf{Z}_{\text{ray}} + \mathbf{Z}_{22})^{-1} \mathbf{Z}_{21} \mathbf{V}'(z').$$

Avec  $\mathbf{P}(z') = \mathbf{Z}^+(z') \mathbf{V}(z')$ , nous obtenons :

$$\mathbf{Z}^+(z') = \mathbf{Z}_{11} - \mathbf{Z}_{12} (\mathbf{Z}_{\text{ray}} + \mathbf{Z}_{22})^{-1} \mathbf{Z}_{21}. \quad (1.15)$$

Nous arrivons finalement à :

$$\boxed{\mathbf{Z}^+(z') = -\mathbf{Z}_c \mathbf{S}_s^{-1} \mathbf{C}_s + \mathbf{Z}_c \mathbf{S}_s^{-1} [\mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_{\text{ray}} - \mathbf{S}_s^{-1} \mathbf{C}_s]^{-1} \mathbf{S}_s^{-1}}. \quad (1.16)$$

#### Etape 3 : calcul de $\mathbf{Z}^-(z')$

Ramenons maintenant la matrice impédance d'entrée (pour laquelle la condition de Neumann est choisie) au point souhaité par la même méthode. Notons dans cette partie  $\mathbf{C}_e$  la matrice diagonale constituée des  $\cosh(ik_{mn}l_1)$  et  $\mathbf{S}_e$  la matrice diagonale constituée des  $\sinh(ik_{mn}l_1)$ , avec  $l_1$  la distance entre l'entrée et le point  $z'$  où nous ramenons l'impédance. D'après la matrice impédance du multiporte (1.13), nous avons dans ce cas :

$$\mathbf{P}'(z') = -\mathbf{Z}_c \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{V}'(z' - l_1) + \mathbf{Z}_c \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{C}_e \mathbf{V}'(z'). \quad (1.17)$$

Mais comme nous travaillons avec une condition de Neumann à l'entrée nous avons :

$$\mathbf{V}'(z' - l_1) = 0,$$

ainsi d'après (1.17) et utilisant  $\mathbf{P}'(z') = \mathbf{Z}^-(z') \mathbf{V}'(z')$ , nous avons :

$$\boxed{\mathbf{Z}^-(z') = \mathbf{Z}_c \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{C}_e}. \quad (1.18)$$

**Etape 4 : lien entre les deux impédances ramenées au point souhaité (saut de vitesse)**

Nous allons ici chercher à relier les impédances  $\mathbf{Z}^+$  et  $\mathbf{Z}^-$  au point  $z'$  considéré. Dans un premier temps nous allons utiliser le fait que la fonction de Green est continue en ce point. En notant  $P'_{mn}(z') = [g_{mn}(z, z')]_{z=z' \pm \epsilon}$ , nous avons donc

$$P'_{mn}(z', \omega) = P'_{mn}(z', \omega) = P'_{mn}(z', \omega). \quad (1.19)$$

D'après l'équation (1.7) intégrée sur un intervalle de largeur  $2\epsilon$  entre  $z' + \epsilon$  et  $z' - \epsilon$  (avec  $\epsilon \rightarrow 0$ ), nous avons :

$$\int_{z'-\epsilon}^{z'+\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_{mn}^2 \right) g_{mn}(z, z') dz = -S^{-1}, \quad (1.20)$$

avec la continuité de la pression, quand  $\epsilon \rightarrow 0$  nous obtenons :

$$\partial_z P'_{mn}(z', \omega) - \partial_z P'_{mn}(z', \omega) = -S^{-1}, \quad (1.21)$$

avec  $\partial_z P'_{mn}(z') = [\partial_z g_{mn}(z, z')]_{z=z' \pm \epsilon}$ .

D'après l'équation d'Euler, nous avons :

$$V'_{mn}(z', \omega) = -\frac{i}{k} \partial_z P'_{mn}(z', \omega),$$

soit

$$\partial_z P'_{mn}(z', \omega) = ik V'_{mn}(z', \omega),$$

et d'après 1.21, nous obtenons :

$$V'_{mn}(z', \omega) - V'_{mn}(z', \omega) = -\frac{1}{ikS}. \quad (1.22)$$

A présent définissons  $\mathbf{W}$ , un vecteur colonne de  $M_m \times N_n$  lignes dont les éléments valent tous 1.

D'après la définition de l'impédance ( $\mathbf{Z}^+ = \mathbf{P}^+ / \mathbf{V}^+$  et  $\mathbf{Z}^- = \mathbf{P}^- / \mathbf{V}^-$ ), l'équation (1.22) est équivalente à :

$$(\mathbf{Z}^+(z'))^{-1} \mathbf{P}^+(z') - (\mathbf{Z}^-(z'))^{-1} \mathbf{P}^-(z') = -\frac{1}{ikS} \mathbf{W},$$

or d'après 1.19 :  $\mathbf{P}^+(z') = \mathbf{P}^-(z') = \mathbf{P}'(z')$ , d'où :

$$\boxed{\mathbf{P}'(z') = -\frac{1}{ikS} [(\mathbf{Z}^+(z'))^{-1} - (\mathbf{Z}^-(z'))^{-1}]^{-1} \mathbf{W}}. \quad (1.23)$$

Ce vecteur correspond donc à la valeur de la partie longitudinale de la fonction de Green  $\Gamma(M, M', \omega)$  prise au point source  $z'$ . Cherchons maintenant à obtenir la valeur de cette fonction sur le récepteur placé au point  $z$ .

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.1 Formulation du champ de pression interne

---

#### En tous points du résonateur

Nous devons ici distinguer le cas où le récepteur se trouve à droite de la source ( $z > z'$ ) du cas où il est à gauche de celle-ci ( $z < z'$ ).

##### Premier cas : $z > z'$

Notons  $d = z - z'$ , la distance entre le récepteur et la source, puis  $\mathbf{C}_d$  la matrice diagonale constituée des  $\cosh(ik_{mn}d)$  et  $\mathbf{S}_d$  la matrice diagonale constituée des  $\sinh(ik_{mn}d)$ .

D'après la matrice de transfert (1.8), nous obtenons dans ce cas :

$$\mathbf{g}(z, z') = \mathbf{C}_d \mathbf{P}'(z') + \mathbf{Z}_c \mathbf{S}_d \mathbf{V}'(z').$$

Puis en utilisant  $\mathbf{P}'(z') = \mathbf{Z}^+(z') \mathbf{V}'(z')$ , nous avons finalement :

$$\boxed{\mathbf{g}(z, z') = \mathbf{S}_d [\mathbf{S}_d^{-1} \mathbf{C}_d + \mathbf{Z}_c (\mathbf{Z}^+(z'))^{-1}] \mathbf{P}'(z')}. \quad (1.24)$$

##### Deuxième cas : $z < z'$

Notons  $g = z' - z$ , la distance entre le récepteur et la source, puis  $\mathbf{C}_g$  la matrice diagonale constituée des  $\cosh(ik_{mn}g)$  et  $\mathbf{S}_g$  la matrice diagonale constituée des  $\sinh(ik_{mn}g)$ . D'après la matrice de transfert (1.8) nous obtenons dans ce cas :

$$\mathbf{g}(z, z') = \mathbf{C}_g \mathbf{P}'(z') - \mathbf{Z}_c \mathbf{S}_g \mathbf{V}'(z').$$

Avec  $\mathbf{P}'(z') = \mathbf{Z}^-(z') \mathbf{V}'(z')$ , nous avons :

$$\boxed{\mathbf{g}(z, z') = \mathbf{S}_g [\mathbf{S}_g^{-1} \mathbf{C}_g - \mathbf{Z}_c (\mathbf{Z}^-(z'))^{-1}] \mathbf{P}'(z')}. \quad (1.25)$$

Rappelons que la fonction de Green interne du résonateur s'exprime de la manière suivante :

$$\Gamma(M, M') = \sum_{m=0}^{M_m} \sum_{n=0}^{N_n} \phi_{mn}(r, \theta) \phi_{mn}(r', \theta') g_{mn}(z, z').$$

Nous avons donc maintenant une expression de la fonction de Green interne en tout point à l'intérieur du conduit en fonction des conditions aux extrémités avec la présence d'un point source.

Rappelons ici que les fréquences de résonances que nous allons calculer par la suite correspondent aux pôles de cette fonction de Green. Nous devons alors faire attention à ne pas calculer la fonction de Green sur un noeud de pression, pour éviter cela nous nous plaçons proche de l'entrée de notre conduit afin d'être sur un maximum de pression (où nous avons une condition de Neumann).

Nous avons choisi d'imposer une condition de Neumann à l'entrée de notre système, il reste maintenant à définir une condition décrivant le rayonnement à l'autre extrémité.

## 1.2 Calcul de l'impédance de rayonnement

Nous allons nous intéresser dans cette partie à l'impédance de rayonnement que nous avons choisie pour décrire le couplage du milieu interne avec le milieu externe (rappelons que nous travaillons dans un premier temps avec un cylindre de longueur finie avec un écran infini débouchant dans un milieu semi-infini). Un des buts de notre étude est de calculer les fréquences de résonances de notre système. Ces fréquences étant complexes (ceci étant dû aux pertes par rayonnement) nous avons besoin de calculer l'impédance de rayonnement pour de telles fréquences. Pour cela, nous avons choisi de nous baser sur la formulation multimodale proposée par Zorumski dans [8]. Cette formulation, valide uniquement pour des fréquences réelles, est un développement des résultats de Rayleigh pour le piston plan repris par Morse dans [18]. Les calculs d'une telle impédance sont repris dans l'annexe C. Les calculs permettant d'étendre la validation de cette formulation aux fréquences complexes sont détaillés dans un article que nous avons soumis au JSV, disponible sur le serveur HAL [19] et sont repris dans cette partie.

### 1.2.1 Expression de l'impédance de rayonnement de Zorumski

Dans un premier temps nous partons de la formulation proposée par Zorumski (détailée dans l'annexe C), où un coefficient  $Z_{mnl}$  de notre impédance de rayonnement (notée  $\mathbf{Z}_{\text{ray}}$  dans la partie précédente) s'exprime de la manière suivante :

$$Z_{mnl} = -i \int_0^\infty \tilde{\tau} (\tilde{\tau}^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \tilde{D}_{mn}(\tilde{\tau}) \tilde{D}_{ml}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}, \quad (1.26)$$

avec

$$\tilde{D}_{mn}(\tilde{\tau}) = kb \frac{\tilde{\tau} \tilde{\psi}_{mn}(kb) J'_m(\tilde{\tau} kb)}{\xi_{mn}^2 - \tilde{\tau}^2}. \quad (1.27)$$

Or, cette formulation n'est plus valable pour des fréquences complexes car l'intégrale contenant la fonction de Bessel  $J'_m(\tilde{\tau} kb)$  devient divergente pour  $k$  complexe. Ceci s'explique par le développement asymptotique suivant (voir [20], Eq. 9.2.1, p. 364) pour  $\nu$  fixé et  $|\kappa| \rightarrow \infty$  :

$$J_\nu(\kappa) = \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa}} \left[ \cos\left(\kappa - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + e^{|\Im(\kappa)|} O(|\kappa|^{-1}) \right], \quad (1.28)$$

avec  $|\arg \kappa| < \pi$ .

Ainsi, pour  $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$  avec  $k \in \mathbb{C}$  nous avons  $J'_m(\tilde{\tau} kb) \rightarrow \infty$  quand  $\Im(k) \neq 0$ . De ce fait, la formulation de l'impédance de rayonnement donnée par Zorumski (1.26) contient alors des intégrales divergentes pour toutes fréquences non réelles. Nous devons donc développer une nouvelle formulation de l'impédance de rayonnement valable pour toutes les fréquences.

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.2 Calcul de l'impédance de rayonnement

#### 1.2.2 Formulation de l'impédance de rayonnement valide pour des fréquences complexes

La formulation de Zorumski est notamment basée sur le développement analytique de la fonction de Green en espace libre  $e^{ikh}/h$  (voir annexe C). Pour cela il utilise une formule de Sonine ([21], p.416, Eq. 4) et arrive au résultat suivant en  $z = 0$  :

$$\frac{e^{ikh}}{h} = k \int_0^\infty \tilde{\tau}(\tilde{\tau}^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} J_0(\tilde{\tau}kh) d\tilde{\tau}. \quad (1.29)$$

Comme nous pouvons le voir à l'aide des calculs présentés dans l'annexe C, c'est ce développement qui introduit la divergence quand la fréquence est complexe. Nous allons donc utiliser une autre forme de l'intégrale infinie de Sonine pour développer la fonction de Green, qui est donnée par Watson ([21], p. 416, Eq.4) :

$$\frac{e^{ikh}}{h} = \int_0^\infty \tau(\tau^2 - k^2)^{-\frac{1}{2}} J_0(\tau h) d\tau. \quad (1.30)$$

Cette intégrale est bien convergente même pour un  $k$  complexe. Mais une difficulté apparaît puisque  $k$  devient alors un point de branchement. Pour une dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ , le chemin d'intégration passe de 0 à  $+\infty$  sur l'axe réel en dessous de  $k$ . Or la recherche de résonances passe par la recherche de valeur  $k$  de partie imaginaire négative et donc la formule précédente n'est plus valide. Il faut alors que le chemin d'intégration passe "sous"  $k$ , il est classiquement déformé comme nous pouvons le voir sur la figure (1.2.2).

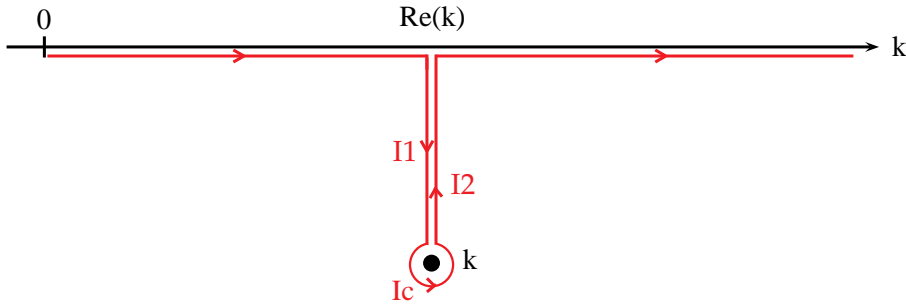


Figure 1.3 – Déformation du contour d'intégration.

Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikh}}{h} = & \int_0^{|\Re(k)|} J_0(\tau h) \tau(\tau^2 - k^2)^{-\frac{1}{2}} d\tau + I_1(k, h) + I_c + I_2(k, h) + \\ & + \int_{|\Re(k)|}^\infty J_0(\tau h) \tau(\tau^2 - k^2)^{-\frac{1}{2}} d\tau, \end{aligned} \quad (1.31)$$

avec

$$I_1(k, h) = I_2(k, h) = - \int_{|\Re(k)|}^k J_0(\tau h) \tau(\tau^2 - k^2)^{-\frac{1}{2}} d\tau,$$



et  $I_c$  qui est nul par le lemme de Jordan (d'après [22]).

En procédant comme dans [23] (p.410), nous pouvons alors distinguer les cinq cas suivants :

i)  $\Re(k) \leq 0$  and  $\Im(k) > 0$

$$\frac{e^{ikh}}{h} = \int_0^\infty J_0(\tau h) \tau (\tau^2 - k^2)^{-\frac{1}{2}} d\tau. \quad (1.32)$$

ii)  $\Re(k) \leq 0$  and  $\Im(k) \leq 0$

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikh}}{h} = & -i \int_0^{|\Re(k)|} J_0(\tau h) \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} d\tau + \int_{|\Re(k)|}^\infty J_0(\tau h) \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau \\ & - 2 \int_{|\Re(k)|}^k J_0(\tau h) \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau. \end{aligned} \quad (1.33)$$

iii)  $\Re(k) > 0$  and  $\Im(k) > 0$

$$\frac{e^{ikh}}{h} = +i \int_0^{|\Re(k)|} J_0(\tau h) \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} d\tau + \int_{|\Re(k)|}^\infty J_0(\tau h) \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau. \quad (1.34)$$

iv)  $\Re(k) > 0$  and  $\Im(k) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikh}}{h} = & J_0(kh) k \sqrt{2\epsilon} (1 - i) + i \int_0^{|k|(1-\epsilon)} J_0(\tau h) \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} d\tau \\ & + \int_{|k|(1+\epsilon)}^\infty J_0(\tau h) \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau, \end{aligned} \quad (1.35)$$

où  $\epsilon$  est le rayon du cercle de centre  $k$  avec  $\epsilon < 1$ .

v)  $\Re(k) > 0$  and  $\Im(k) < 0$

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikh}}{h} = & +i \int_0^{|\Re(k)|} J_0(\tau h) \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} d\tau + \int_{|\Re(k)|}^\infty J_0(\tau h) \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau \\ & - 2 \int_{|\Re(k)|}^k J_0(\tau h) \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Pour avoir une intégration réelle dans la troisième intégrale de l'équation (1.33) nous procédons au changement de variable suivant (avec  $\Re(k)$  qui devient une constante pour un  $k$  donné) :

$$\tau' = (\tau - \Re(k))i,$$

et dans la troisième intégrale de l'équation (1.36) :

$$\tau' = (\tau + \Re(k))i.$$

Contrairement à la formulation proposée par Zorumski, ces résultats nous permettent d'obtenir une intégrale qui reste convergente lorsque les fréquences deviennent complexes.

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.2 Calcul de l'impédance de rayonnement

#### 1.2.3 Validation de la nouvelle formulation de l'impédance de rayonnement

##### Fréquences réelles

Dans un premier temps, nous souhaitons vérifier les résultats précédents pour des fréquences réelles. Pour cela, nous pouvons comparer les résultats obtenus avec la formulation de Zorumski (1.26) et ceux obtenus avec notre développement de la fonction de Green en espace libre dans le cas où  $\Im(k) = 0$ . Ainsi d'après (1.35), l'élément  $Z_{mnl}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} Z_{mnl} = & -ik2\pi S^{-1} \left[ D_{mn}(k)D_{ml}(k)k\sqrt{2\epsilon}(1-i) + \right. \\ & + i \int_0^{|k|(1-\epsilon)} \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} D_{mn}(\tau)D_{ml}(\tau) d\tau \\ & \left. + \int_{|k|(1+\epsilon)}^\infty \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} D_{mn}(\tau)D_{ml}(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (1.37)$$

où

$$D_{mn}(\tau) = b \frac{\tau \psi_{mn}(b) J'_m(\tau b)}{\lambda_{mn}^2 - \tau^2}. \quad (1.38)$$

Etant donné que nous travaillons avec une norme différente de celle utilisée par Zorumski, nous avons préféré retranscrire les différentes étapes de calculs qui nous ont permis d'obtenir la relation 1.37 dans l'annexe D. Précisons tout de même que les impédances obtenues avec les deux formulations sont adimensionnées.

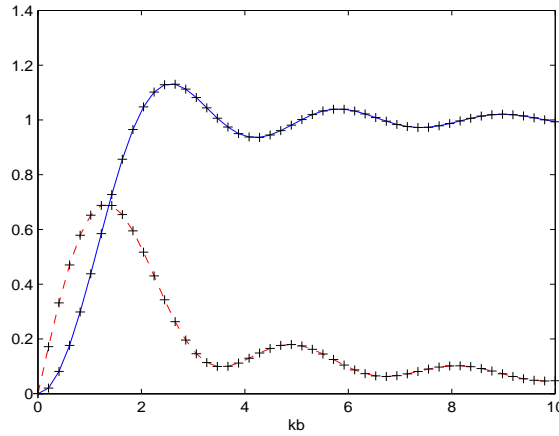


Figure 1.4 – Partie réelle (trait plein) et valeur absolue de la partie imaginaire (pointillés) de l'impédance de rayonnement pour le mode plan ( $m = n = 0$  et  $l = 0$ ) en fonction de  $kb$ , calculé avec la formulation de Zorumski (C.19) et avec notre formulation (1.37) (croix).

Nous observons sur la figure (1.4) la comparaison entre l'impédance de rayonnement pour le mode plan ( $m = n = 0$  et  $l = 0$ ) d'après la formulation de Zorumski (C.19) et

d'après la formule (1.37). Nous pouvons voir que les deux formulations donnent un résultat similaire (avec une erreur relative de  $10^{-6}$  avec  $\epsilon = 10^{-3}$ ). Il en est de même pour les impédances d'autres modes que le mode plan. Ces résultats confirment alors la validité de notre formulation pour des fréquences réelles (de plus, le temps de calcul des deux formulations est quasi-identique, soit environ 0,001s/f pour 1 mode et 0,15s/f pour 10 modes).

### Fréquences complexes

Dans un deuxième temps, dans le but de valider la formulation de l'impédance de rayonnement pour des fréquences complexes, nous avons comparé  $Z_{000}$  obtenue dans le cas où  $Re(k) > 0$  et  $Im(k) < 0$  :

$$\begin{aligned} Z_{000} = & -ik2\pi S^{-1} \left[ i \int_0^{|\Re(k)|} \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} D_{00}(\tau) D_{00}(\tau) d\tau + \right. \\ & + \int_{|\Re(k)|}^{+\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} D_{00}(\tau) D_{00}(\tau) d\tau - \\ & \left. - 2 \int_{|\Re(k)|}^k \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} D_{00}(\tau) D_{00}(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (1.39)$$

avec l'impédance de rayonnement du piston plan avec écran infini définie par Rayleigh telle que (Ref. [23] p.1458) :

$$Z_0 \simeq \left[ 1 - \frac{1}{kb} J_1(2kb) - \frac{i}{kb} S_1(2kb) \right]. \quad (1.40)$$

Nous avons remarqué que les deux formulations donnent le même résultat, ce qui est normal car la formulation de Zorumski repose sur une extension des résultats de Rayleigh pour le piston plan à tous les modes du conduit. Donc, dans le cas du mode plan, ces deux formulations décrivent exactement la même quantité. Ceci confirme donc la validité de notre formulation complexe de l'impédance de rayonnement.

Dans [24] nous avons cherché, dans un travail en collaboration avec Silva et al., à obtenir une approximation de l'impédance de rayonnement du mode plan en tenant compte de l'influence des autres modes. Dans l'annexe E, nous rappelons le principe utilisé pour obtenir cette approximation ainsi que ses limites.

Maintenant que nous avons parfaitement défini la fonction de Green  $\Gamma(M, M', \omega)$  en tout point à l'intérieur de notre conduit, nous pouvons nous intéresser aux fréquences de résonance de notre système.

## 1.3 Calcul des fréquences de résonance

Le but de cette partie est de calculer les fréquences de résonance du système couplé avec le milieu extérieur. Dans notre cas, elles sont définies comme étant un outil mathématique correspondant aux pôles complexes de la fonction de Green  $\Gamma(M, M', \omega)$  définie

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.3 Calcul des fréquences de résonance

---

précédemment. Ces fréquences sont très intéressantes car elles nous donnent l'essentiel de l'information sur le rayonnement. En effet, elles sont complexes et leur partie imaginaire est directement relié aux pertes par rayonnement car ce sont les seules pertes considérées (dans un premier temps nous ne tenons pas compte d'autres types de pertes comme les pertes visco-thermiques). Précisons ici que ces fréquences de résonance complexes ont déjà été calculées par le passé pour le mode plan en dessous de la fréquence de coupure du premier mode non plan (avec une impédance de rayonnement intermodale) et sont parfois appelées *fréquences propres complexes* comme dans [25] où elles correspondent aussi aux pôles complexes de la fonction de Green (également utilisées dans [12]). Rappelons pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté que les fréquences de résonance complexes que nous calculons sont différentes des fréquences propres du conduit qui correspondent aux modes réels qui sont "propres" au résonateur (solution de l'équation d'Helmholtz sans source). Notons ici qu'à notre connaissance le calcul des résonances de tous les modes (notamment des modes non plans) dépendant du rayonnement ne se trouve pas dans la littérature. L'avantage est que nous pourrions alors directement relier les différents paramètres (géométrie du résonateur, masse volumique du fluide...) et le rayonnement des modes de résonance concernés. Pour obtenir les fréquences de résonance de notre système, nous avons choisi d'utiliser une méthode de Newton dans le plan complexe que nous avons programmée dans un code Fortran. Comme nous avons choisi une dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ , nous devons avoir une partie imaginaire négative pour les fréquences de résonances afin de respecter le principe de conservation de l'énergie (i.e.  $e^{-i\omega_{mn}t} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ ). Nous avons alors une double infinité de solutions symétriques par rapport à l'axe imaginaire (les solutions telles que  $\Im(k) < 0$  avec  $\Re(k) > 0$  ou  $\Re(k) < 0$ ). Nous avons choisi ici de présenter seulement les fréquences de résonance dont la partie réelle est positive. Ainsi, nous travaillons avec la formule (1.36) et  $Z_{mnl}$  s'exprime alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Z_{mnl} = & -ik2\pi S^{-1} \left[ i \int_0^{|\Re(k)|} \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} D_{mn}(\tau) D_{ml}(\tau) d\tau + \right. \\ & + \int_{|\Re(k)|}^{+\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} D_{mn}(\tau) D_{ml}(\tau) d\tau - \\ & \left. - 2 \int_{|\Re(k)|}^k \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} D_{mn}(\tau) D_{ml}(\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (1.41)$$

C'est donc cette expression que nous utilisons comme condition de rayonnement à l'extrémité du conduit.

Notons que dans la suite de ce chapitre nous avons choisi de travailler avec un cylindre de longueur  $L = 1m$  et de rayon  $b = 0,1m$  de façon à voir apparaître les modes non plans à des fréquences pas trop élevées ( $f_{c,mn} = (c/2\pi) * (\gamma_{mn}/b)$ , ainsi avec  $c = 340m/s$ , nous avons  $f_{c,10} = 995,7Hz$ ,  $f_{c,01} = 2072,5Hz$ ,  $f_{c,02} = 3796,5Hz$ , ...). Ceci va notamment nous permettre de mettre en avant plus facilement les effets du couplage intermodal.

### 1.3.1 Présentation de la méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode itérative de recherche de zéro  $z_j$  qui s'écrit de la manière suivante (d'après [20], p.18 Eq. (3.9.5)) :

$$z_{j+1} = z_j - \frac{f(z_j)}{f'(z_j)}.$$

Les fréquences de résonance complexes correspondent ainsi aux zéros de la fonction  $f$  qui est définie comme l'inverse de la fonction de Green  $\Gamma(M, M', \omega)$ . Nous calculons ainsi bien les pôles (complexes) de la fonction de Green.

Nous avons alors :

$$\frac{f(z_j)}{f'(z_j)} = \frac{1}{\Gamma(M, M', k)} \times \frac{1}{-\Gamma'(M, M', k)/\Gamma(M, M', k)^2},$$

car  $((\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2})$ , puis comme nous n'avons pas directement accès à la dérivée  $\Gamma'$ , nous l'estimons par différences finies :

$$\Gamma'(M, M', k) = \frac{\Gamma(M, M', k + \varepsilon) - \Gamma(M, M', k)}{\varepsilon},$$

nous arrivons finalement à

$$z_{j+1} = z_j - \frac{\varepsilon}{1 - \Gamma(M, M', k + \varepsilon)/\Gamma(M, M', k)}.$$

Pour calculer les résonances, nos tests ont montré que la solution converge à partir de  $\varepsilon = (1.10^{-6} + 1.10^{-6}i)$  (nous travaillons donc avec cette valeur). Le critère d'arrêt des itérations est choisi lorsque nous obtenons une précision relative de la solution de  $1.10^{-10}$ . Notons également que la précision relative requise pour le calcul des intégrales est de  $10^{-3}$ . Le temps de calcul augmente évidemment avec le nombre de modes pris en compte mais reste de l'ordre de moins d'une seconde (par fréquence) même avec la prise en compte de 10 modes de conduits d'ordres supérieurs (leur effet est décrit dans les prochaines parties). Un paramètre qui influence le temps de calcul (et sa réussite) est le choix de la valeur de départ. Dans notre cas, la valeur de la fréquence de résonance réelle pour un problème Neumann/Dirichlet ( $z_j = \alpha_j = \frac{(2j+1)\pi}{2L}, j = 0, 1, 2, \dots$ ) avec une petite partie imaginaire ( $\Im(z_j) \simeq 5\%\Re(z_j)$ ) est suffisante pour faire converger rapidement la méthode de Newton vers la solution. Précisons ici que les fonctions de Bessel complexes dont nous avons besoin sont calculées à partir d'approximants de Padé comme décrit dans [26].

### 1.3.2 Résonances du mode plan seul

Dans un premier temps, nous étudions les résonances du mode plan ( $m=n=0$ ) sans l'influence des modes de conduit d'ordre supérieurs ( $l=0$ ). Ceci revient à travailler avec l'impédance du piston plan définie par Rayleigh par la relation 1.40 ou avec  $Z_{000}$  donné par l'équation 1.41. Lorsque le rayonnement est pris en compte, les  $j^{eme}$  nombres d'onde

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.3 Calcul des fréquences de résonance

$j$	$k_{00}^j$	$k_{00,r}^j$
0	1,5708	1,449 - 0,0095i
1	4,712	4,369-0,077i
2	7,854	7,333-0,182i
3	10,996	10,336-0,296i
4	14,137	13,365-0,412i
5	17,279	16,409-0,526i
6	20,42	19,463-0,645i
7	23,562	22,523-0,773i
8	26,7	25,59 -0,924i
9	29,85	28,674-1,12i
10	32,99	31,822-1,408i
11	36,13	35,377-1,711i
12	39,27	38,747-1,409i

Table 1.1 – Valeurs des  $j$  premières résonances sans rayonnement ( $k_{00}^j$ ) et avec rayonnement ( $k_{00,r}^j$ ) sans l'influence des modes de conduit d'ordres supérieurs ( $l = 0$ ), avec  $b = 0,1m$  et  $L = 1m$ .

de résonance du mode  $mn$  sont notés  $k_{mn,r}^j$  et notés  $k_{mn}^j$  lorsque le rayonnement n'est pas pris en compte (ils sont alors purement réels).

Nous remarquons à l'aide de la table 1.1 que sans rayonnement, les valeurs des résonances sont celles obtenues pour le cas classique d'un cylindre fermé à une extrémité et ouvert à l'autre (problème Neumann/Dirichlet), exprimées par (voir l'annexe B) :

$$k_{00}^j = \alpha_j = \frac{(2j+1)\pi}{2L}, j = 0, 1, 2, \dots$$

Nous observons, toujours à l'aide de la table 1.1 que la partie réelle des résonances décroît quand le rayonnement est pris en compte : ceci est un comportement bien connu car l'effet du rayonnement peut être décrit par une augmentation de la longueur du cylindre. Cette correction de longueur pour un cylindre semi-infini avec un écran infini a été introduite par Rayleigh dans [4] et développée notamment par Norris et Sheng dans [6] et s'exprime de la manière suivante (avec une modification donnée en communication privée par A. N. Norris retranscrite dans l'annexe F) :

$$\frac{\Delta L}{b} = 0.82159 \frac{1 + \frac{kb}{1.2949}}{1 + \frac{kb}{1.2949} + \left(\frac{kb}{1.2949}\right)^2}. \quad (1.42)$$

La figure 1.5 (dont les valeurs sont retranscrites dans le tableau 1.2) montre que la différence entre la partie réelle de la première fréquence de résonance  $k_{00,r}^0$  d'un cylindre de longueur finie rayonnant et celle estimée en utilisant la correction de longueur définie par

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.3 Calcul des fréquences de résonance

l'équation (1.42) ( $k_{00,\Delta L}^j = (2j+1)\pi/[2(L+\Delta L)]$ ), tends vers zéro quand le ratio  $L/b$  augmente. Les valeurs sont très proches ( $\leq 1\%$  d'erreur) pour un ratio  $L/b > 3$  (ceci a été vérifié pour plusieurs valeurs de  $L$  et nous avons obtenu les mêmes résultats).

$\frac{L}{b}$	$k_{00}^0$	$\Re(k_{00,r}^0)$	$\Delta L$ défini par (1.42)	$k_{00,\Delta L}^0$	D %
1	15,708	9,017	0,0493	10,52	14,29
1,1	14,28	8,59	0,0521	9,69	11,35
1,2	13,09	8,055	0,0545	9	10,5
1,3	12,083	7,647	0,0566	8,42	9,18
1,4	11,22	7,279	0,0586	7,91	7,98
1,5	10,472	6,944	0,0603	7,47	7,04
2	7,854	5,65	0,0669	5,885	3,99
2,5	6,2832	4,77	0,0709	4,895	2,55
3	5,236	4,13	0,0736	4,205	1,78
10	1,5708	1,449	0,0811	1,453	0,28
40	0,3927	0,3845	0,0821	0,3848	0,078
200	0,07854	0,078208	0,08216	0,07822	0,015

Table 1.2 – Partie réelle de la première résonance dans le cas sans rayonnement ( $k_{00}^0$ ), avec rayonnement ( $\Re(k_{00,r}^0)$ ), sans rayonnement mais en tenant compte d'une correction de longueur ( $k_{00,\Delta L}^0$ ), ainsi que la valeur absolue en % de la différence :  $D = \frac{|\Re(k_{00,r}^0) - k_{00,\Delta L}^j|}{\Re(k_{00,r}^0)}$ . Avec  $L = 1$  m.

Ces résultats peuvent être étendus aux autres fréquences de résonances du mode plan (tout en restant en dessous de la fréquence de coupure du premier mode non plan). Comme nous pouvons le voir dans le tableau 1.3, pour un ratio  $L/b = 10$ , les parties réelles des résonances obtenues avec la correction de longueur sont très proches de celles obtenues avec la méthode modale en tenant seulement compte du rayonnement du mode plan. Précisons tout de même que l'influence des modes d'ordres supérieurs est pris en compte dans la formule 1.42. Ainsi, pour avoir une bonne comparaison entre les deux méthodes, nous devons nous aussi prendre en compte l'effet du couplage intermodal dû aux modes de conduits d'ordres supérieurs.

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.3 Calcul des fréquences de résonance

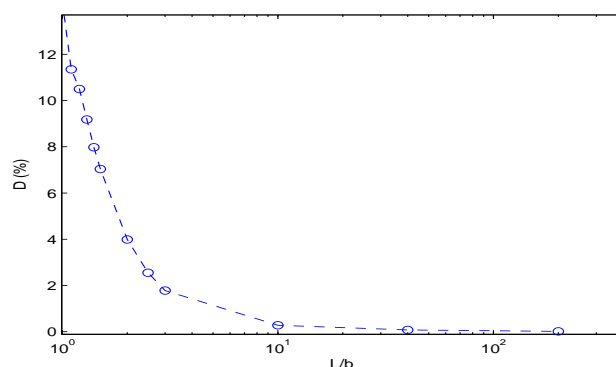


Figure 1.5 – Valeur absolue en % de la différence ( $D = \frac{|\Re(k_{00,r}^0) - k_{00,\Delta L}^0|}{\Re(k_{00,r}^0)}$ ) entre la valeur de la partie réelle de la première fréquence de résonance du mode plan ( $m=n=0$ ) calculée avec la méthode de Newton ( $k_{00,r}^0$ ) et celle estimée avec la correction de longueur définie par l'équation (1.42) ( $k_{00,\Delta L}^0$ ), pour plusieurs ratios  $L/b$  avec  $L = 1\text{m}$ .

j	$k_{00}^j$	$\Re(k_{00,r}^j)$	$\Delta L$ défini par (1.42)	$k_{00,\Delta L}^0$	D %
0	1,5708	1,449	0,0811	1,453	0,28
1	4,712	4,369	0,0749	4,384	0,32
2	7,854	7,333	0,0669	7,362	0,39
3	10,996	10,336	0,0591	10,382	0,44
4	14,137	13,365	0,0523	13,434	0,51
5	17,279	16,409	0,0466	16,51	0,61
6	20,42	19,463	0,0418	19,601	0,7
7	23,562	22,523	0,039	22,677	0,68
8	26,7	25,59	0,0344	25,816	0,87
9	29,85	28,674	0,0315	28,934	0,9
10	32,99	31,822	0,029	32,056	0,73
11	36,13	35,377	0,0269	35,182	0,55
12	39,27	38,747	0,025	38,31	1,14

Table 1.3 – Partie réelle de la  $j^{eme}$  résonance dans le cas sans rayonnement ( $\Re(k_{00}^j)$ ), avec rayonnement ( $\Re(k_{00,r}^j)$ ), sans rayonnement mais en tenant compte d'une correction de longueur ( $k_{00,\Delta L}^j$ ), ainsi que la valeur absolue en % de la différence :  $D = \frac{|\Re(k_{00,r}^j) - k_{00,\Delta L}^j|}{\Re(k_{00,r}^j)}$  pour un ratio  $L/b = 10$  ( $L = 1\text{m}$  et  $b = 0,1\text{m}$ ).

#### 1.3.3 Résonances du mode plan avec l'influence des modes de conduits d'ordres supérieurs ( $l \neq 0$ )

Le principal intérêt de la formulation complexe de Zorumski est que nous pouvons étudier l'influence des modes de conduits d'ordres supérieurs (notés H.M pour Higher order



Modes en anglais). Ces modes sont évanescents et ne transportent donc pas d'énergie contrairement aux modes propagatifs. Nous constatons à l'aide de la figure 1.6 (quelques valeurs sont reportées dans la table 1.4) que même lorsque le mode 01 est évanescent, il influe sur les résonances du mode plan et principalement quand nous nous rapprochons de sa fréquence de coupure ( $k_{c01} = \lambda_{01} = 3,83/b$ ). Ainsi, lorsque le rayon de notre résonateur est faible, le couplage entre le mode 01 évanescent et le mode plan n'est significatif qu'à haute fréquence. C'est pour cette raison que dans la plupart des calculs d'impédance d'entrée ou de fréquences de résonance d'instruments à vent qui ont un faible rayon (trompette, clarinette...) leurs effets sont négligés. Mais lorsque le rayon du résonateur est de quelques centimètres (conduit vocal, didjeridoo, tuyau d'orgue, conduit d'aération...), force est de constater que l'influence des modes évanescents ne peut être négligée.

Nous remarquons également sur la figure 1.6 que si nous sommes en dessous de la première fréquence de coupure  $\lambda_{01} = 3.83/b$ , un seul mode de conduit d'ordre supérieur ( $l = 1$ ) est suffisant pour bien décrire le couplage du mode plan avec le milieu extérieur et si nous sommes entre la première et la deuxième fréquence de coupure, seulement deux modes de conduits d'ordres supérieurs ( $l = 1$  et  $l = 2$ ) sont alors suffisants. Par extension nous pouvons supposer qu'entre la  $n^{eme}$  et  $(n + 1)^{eme}$  fréquence de coupure, seulement  $(n + 1)$  modes de conduit d'ordres supérieurs suffisent à décrire précisément l'influence du champ externe sur les résonances du mode plan ( $m = n = 0$ ).

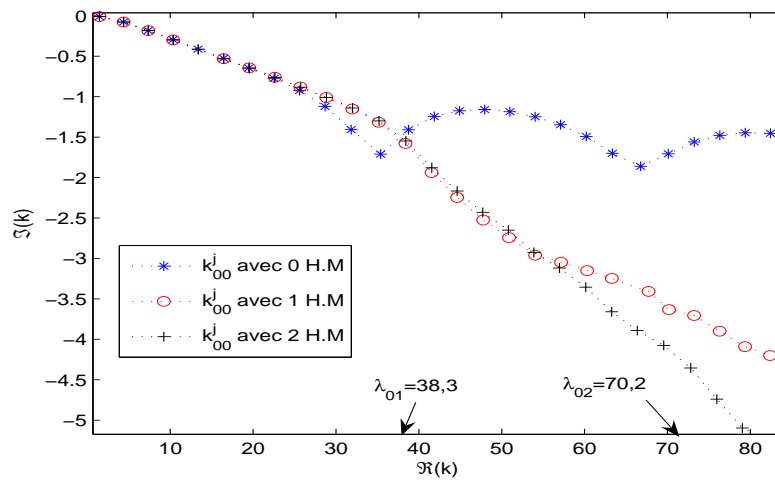


Figure 1.6 – Résonances  $k_{00,r}^j$  du mode plan ( $m = 0, n = 0$ ) avec l'influence de 0 ( $l = 0$ ), 1 ( $l = 1$ ) et 2 ( $l = 2$ ) modes de conduit d'ordres supérieurs, avec  $L = 1m$  and  $b = 0,1m$

La figure 1.6 nous a permis de montrer l'effet du couplage intermodal sur les pertes dues au rayonnement du mode plan. Un moyen de voir plus précisément l'influence des modes d'ordres supérieurs sur la partie réelle des fréquences de résonance du mode plan est de tracer la correction de longueur obtenue en tenant compte de leur influence. Pour

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.3 Calcul des fréquences de résonance

$j$	$k_{00}^j$	$k_{00,r}^j$ avec 0 H.M	$k_{00,r}^j$ avec 1 H.M	$k_{00,r}^j$ avec 2 H.M
0	1,5708	1,449 - 0,0095i	1,451 - 0,0096i	1,452 - 0,0096i
1	4,712	4,369-0,077i	4,375-0,0776i	4,378-0,078i
2	7,854	7,333-0,182i	7,345-0,183i	7,349-0,184i
3	10,996	10,336-0,296i	10,345-0,299i	10,361-0,301i
4	14,137	13,365-0,412i	13,4-0,415i	13,402-0,418i
5	17,279	16,409-0,526i	16,45-0,53i	16,464-0,533i
6	20,42	19,463-0,645i	19,523-0,644i	19,541-0,648i
7	23,562	22,523-0,773i	22,608-0,76i	22,631-0,764i
8	26,7	25,9 -0,924i	25,707-0,881i	25,737-0,884i
9	29,85	28,674-1,12i	28,824-1,01i	28,86-1,01i
10	32,99	31,822-1,408i	31,965-1,152i	32,008-1,14i
11	36,13	35,377-1,711i	35,149-1,317i	35,195-1,3i
12	39,27	38,747-1,409i	38,395-1,579i	38,437-1,548i

Table 1.4 – Valeurs des  $j$  premières résonances sans rayonnement ( $k_{00}^j$ ) et avec rayonnement ( $k_{00,r}^j$ ) pour 0 ( $l = 0$ ), 1 ( $l = 1$ ) et 2 ( $l = 2$ ) modes de conduit d'ordres supérieurs, avec  $b = 0,1m$  et  $L = 1m$ .

$j$	$k_{00}^j$	$\Re(k_{00,r}^j)$ avec 1 H.M	$\Delta L$ défini par (1.42)	$k_{00,\Delta L}^0$	différence  %
0	1,5708	1,451	0,0811	1,453	0,07
1	4,712	4,375	0,0749	4,384	0,21
2	7,854	7,345	0,0669	7,362	0,23
3	10,996	10,345	0,0591	10,382	0,36
4	14,137	13,4	0,0523	13,434	0,25
5	17,279	16,45	0,0466	16,51	0,36
6	20,42	19,523	0,0418	19,601	0,4
7	23,562	22,608	0,039	22,677	0,3
8	26,7	25,707	0,0344	25,816	0,42
9	29,85	28,824	0,0315	28,934	0,38
10	32,99	31,965	0,029	32,056	0,28
11	36,13	35,149	0,0269	35,182	0,09
12	39,27	38,395	0,025	38,31	0,22

Table 1.5 – Partie réelle de la  $j^{eme}$  résonance dans le cas sans rayonnement ( $k_{00}^j$ ), avec rayonnement ( $\Re(k_{00,r}^j)$ ), sans rayonnement mais en tenant compte d'une correction de longueur ( $k_{00,\Delta L}^j$ ), ainsi que la valeur absolue en % de la différence :  $D = \frac{|\Re(k_{00,r}^j) - k_{00,\Delta L}^j|}{\Re(k_{00,r}^j)} * 100$  pour  $b = 0,1m$  et  $L = 1m$ .

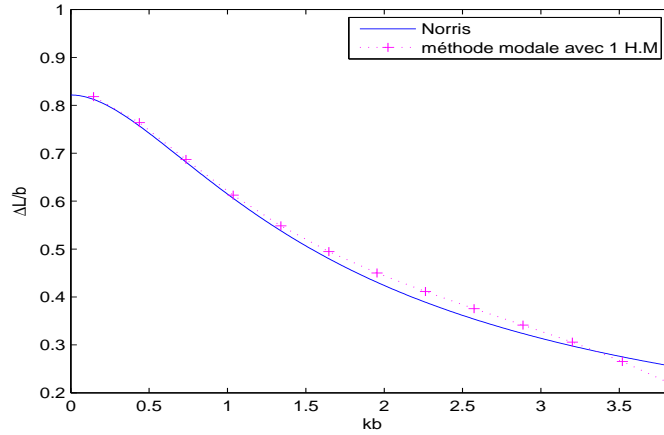


Figure 1.7 – Correction de longueur obtenue avec la relation donnée par Norris (1.42) (trait plein) et obtenue avec la relation (1.43) (pointillé), en dessous de la fréquence de coupure  $\lambda_{01}$ .

cela nous utilisons la relation suivante :

$$\Delta L = \frac{(2j+1)\pi}{2\Re(k_{00,r}^j)} - L. \quad (1.43)$$

Nous pouvons observer sur la figure 1.7 la comparaison de la correction de longueur obtenue avec l'effet d'un mode de conduit d'ordre supérieur avec la correction de longueur classique définie par Norris à l'aide de l'équation 1.42. Nous devons remarquer ici qu'en dessous la fréquence de coupure du premier mode non plan, la correction de longueur est une bonne approximation pour obtenir la partie réelle de la fréquence de résonance. D'après la table 1.7, nous avons au maximum 0,5% de différence entre les parties réelles des résonances obtenues avec les deux méthodes (il était de 1% avec l'approximation piston plan, voir la table 1.3). Mais la correction de longueur ne nous donne pas accès aux pertes dues au rayonnement et n'est valable que lorsque le mode plan est le seul mode propagatif. Notre méthode va nous permettre d'étudier le comportement des modes non plans, dont quelques exemples sont présentés dans la prochaine partie.

#### 1.3.4 Résonances des premiers modes non plans ( $n \neq 0$ )

Nous avons tracé sur la figure 1.8 les nombres d'onde de résonance du mode 00, 01 et 02. Nous observons alors trois séries de résonances, commençant chacune à la fréquence de coupure d'un mode de conduit. Chaque série correspond à un mode de conduit prépondérant même si il est influencé par d'autres modes. C'est en effet ce que nous observons sur les figures 1.9, 1.10 et 1.11 où nous pouvons voir le profil de la fonction de Green autour de différentes fréquences de résonances à l'intérieur d'un cylindre de longueur  $L = 1m$  et

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.3 Calcul des fréquences de résonance

de rayon  $b = 0,1m$ . Sur la figure 1.9 nous avons tracé la fonction de Green autour de la fréquence de résonance  $k_{00,r}^{14}$  et nous observons bien un profil correspondant au mode plan même si il est influencé par le mode 01. Nous remarquons également que la principale influence du mode 01 se retrouve aux alentours de la source placée en  $z = -0.5$  ainsi qu'à l'extrémité ouverte du cylindre (en  $z = 0$ ). Le profil tracé sur la figure 1.10 correspond bien au profil du mode 01 tout comme nous retrouvons le profil du mode 02 sur la figure 1.11. Nous pouvons donc bien rattacher les trois séries de résonances observées sur la figure 1.8 aux fréquences de résonance du mode plan, du mode 01 et du mode 02. Notons que la fonction de Green n'est pas nulle à l'extrémité ouverte du résonateur de part la prise en compte du rayonnement (contrairement au cas classique avec une condition de Dirichlet en sortie). Cela se remarque principalement dans le cas du mode plan qui rayonne beaucoup plus que les autres modes (voir les figures 1.9, 1.10 et 1.11.)

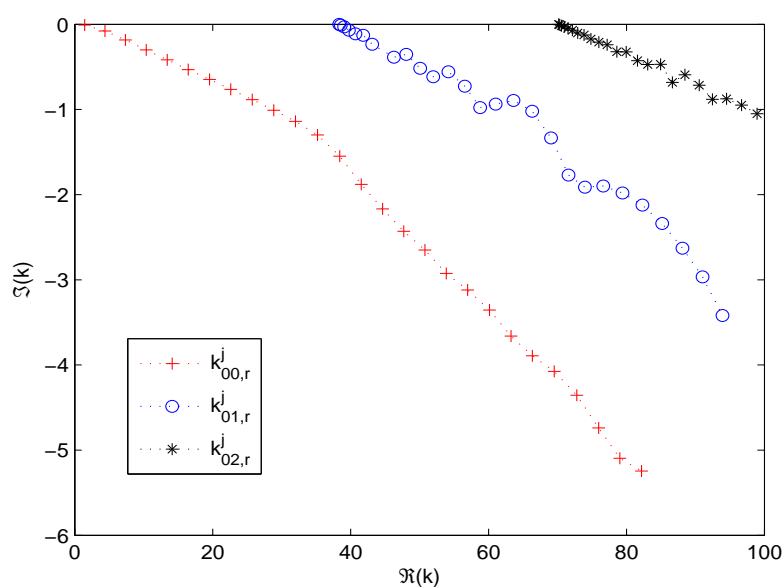


Figure 1.8 –  $k_{00,r}^j$ ,  $k_{01,r}^j$ ,  $k_{02,r}^j$  avec  $L = 1m$  et  $b = 0,1m$ .

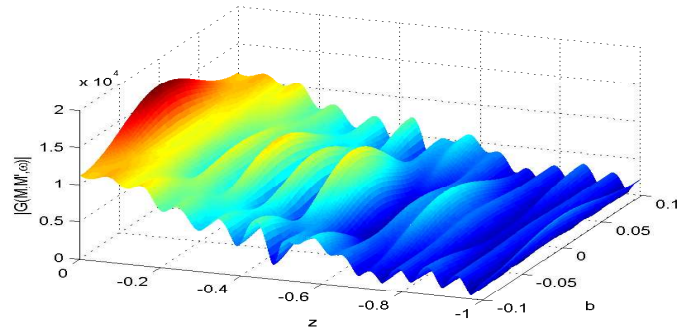


Figure 1.9 – Profil dans le conduit du module de la fonction de Green  $\Gamma$  autour de  $k_{00,r}^{14}$  avec 3HM.

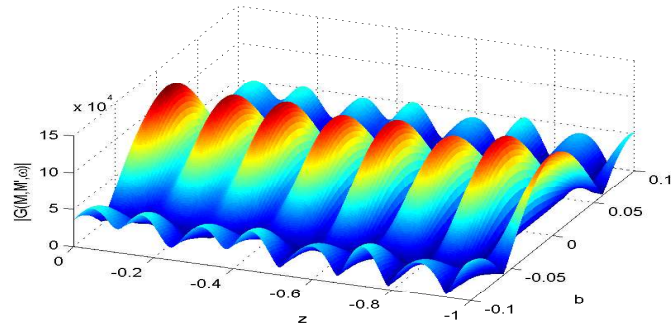


Figure 1.10 – Profil dans le conduit du module de la fonction de Green  $\Gamma$  autour de  $k_{01,r}^7$  avec 3HM.

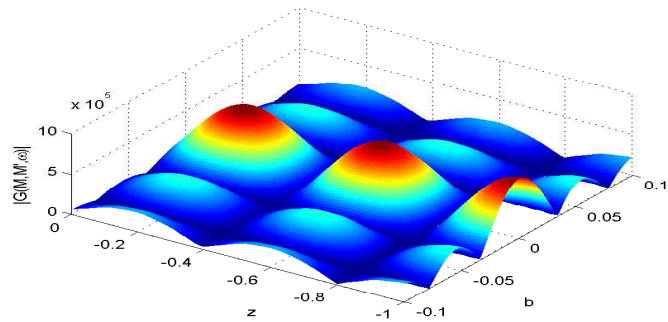


Figure 1.11 – Profil dans le conduit du module de la fonction de Green  $\Gamma$  autour de  $k_{02,r}^2$  avec 3HM.

#### 1.3.5 Evolution des $j$ premières fréquences de résonance en fonction de la masse volumique du fluide externe

Dans cette partie nous allons nous intéresser à l'évolution des  $j$  premières fréquences de résonance longitudinales d'un cylindre de longueur finie, en fonction de la masse volumique du fluide externe (variant de la valeur nulle décrivant le vide à celle de l'eau). Pour cela nous introduisons un coefficient multiplicatif de l'impédance de rayonnement (l'impédance de rayonnement  $\mathbf{Z}_{\text{ray}}$  devient alors  $\eta_\rho \mathbf{Z}_{\text{ray}}$ ). Physiquement, ce coefficient  $\eta_\rho$  peut s'apparenter à un rapport entre la masse volumique du fluide externe et la masse volumique du fluide interne tel que :

$$\eta_\rho = \frac{\rho_{\text{ext}}}{\rho_{\text{int}}}.$$

Précisons que nous faisons varier la valeur de la vitesse du son en fonction de la masse volumique de fluide externe (de la vitesse du son dans le vide 340 m/s à celle dans l'eau soit 1500 m/s) pour une masse volumique du fluide interne constante ( $\rho_{\text{int}} = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ ). Sur la figure (1.12), nous nous apercevons que lorsque  $\eta_\rho \rightarrow 0$  nous retrouvons bien les valeurs sans rayonnement correspondant à un problème Neumann/Dirichlet et que lorsque  $\eta_\rho \rightarrow \infty$  nous tendons alors vers un problème Neumann/Neumann, dans les deux cas avec une partie imaginaire nulle (correspondant bien à un système sans pertes).

Il est intéressant ici de noter que nous observons un maximum de rayonnement (correspondant à un maximum du facteur de pertes  $\zeta_{00}^j = |\Im(k_{00}^j)/\Re(k_{00}^j)|$ ) pour une valeur de la masse volumique du fluide externe. Cela veut dire que certaines fréquences de résonance du conduit rayonnent mieux dans un milieu extérieur composé d'un milieu différent du milieu intérieur. Nous remarquons de plus à l'aide de la figure (1.13), que le maximum est obtenu pour une masse volumique de fluide externe plus petite lorsque l'ordre du mode longitudinal augmente et semble tendre vers une valeur de masse volumique externe limite (qui n'est pas exactement  $\eta_\rho = 1$ ). Remarquons que nous observons bien le même comportement pour les fréquences de résonance des modes non plans comme nous pouvons le voir pour le mode 10 sur les figures 1.14 et 1.15 ou pour le mode 01 sur les figures 1.16 et 1.17. Précisons que dans la suite de notre étude, nous travaillons avec le même fluide à l'intérieur et à l'extérieur du résonateur, nous avons donc  $\eta_\rho = 1$ .

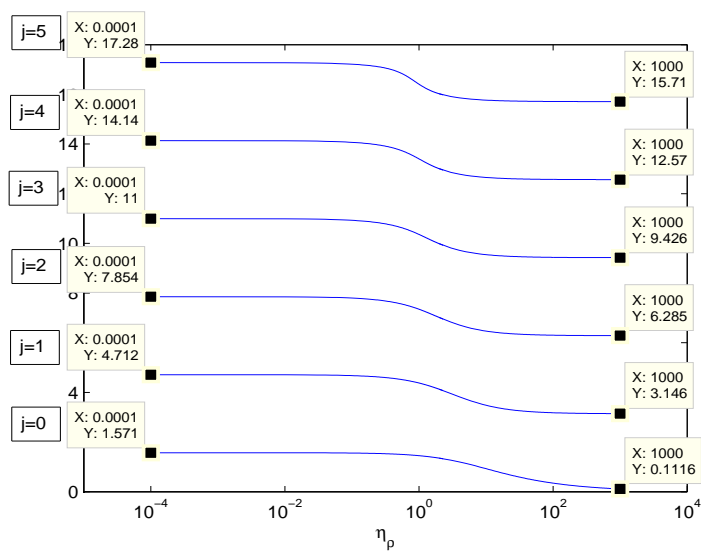


Figure 1.12 – Evolution de la partie réelle des  $j$  premières fréquences de résonance  $k_{00,r}^j$  du mode plan en fonction de  $\eta_\rho$ , pour  $L = 1m$  et  $b = 0, 1m$ .

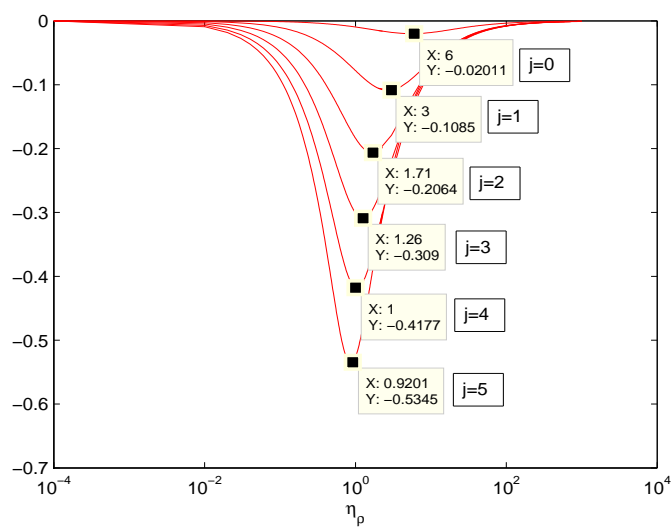


Figure 1.13 – Evolution de la partie imaginaire des  $j$  premières fréquences de résonance  $k_{00,r}^j$  du mode plan en fonction de  $\eta_\rho$ , pour  $L = 1m$  et  $b = 0, 1m$ .

## Chapitre 1 : Cas de référence : cylindre de longueur finie avec un écran infini

### 1.3 Calcul des fréquences de résonance

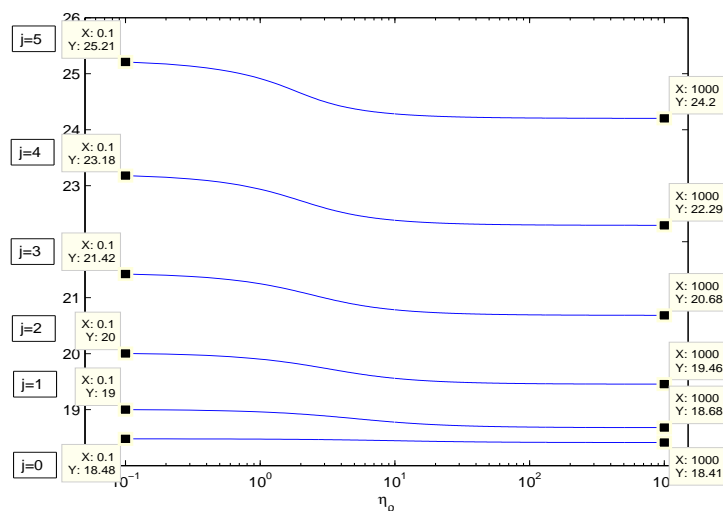


Figure 1.14 – Evolution de la partie réelle des  $j$  premières fréquences de résonance  $k_{10,r}^j$  du mode 10 en fonction de  $\eta_\rho$ , pour  $L = 1m$  et  $b = 0,1m$ .

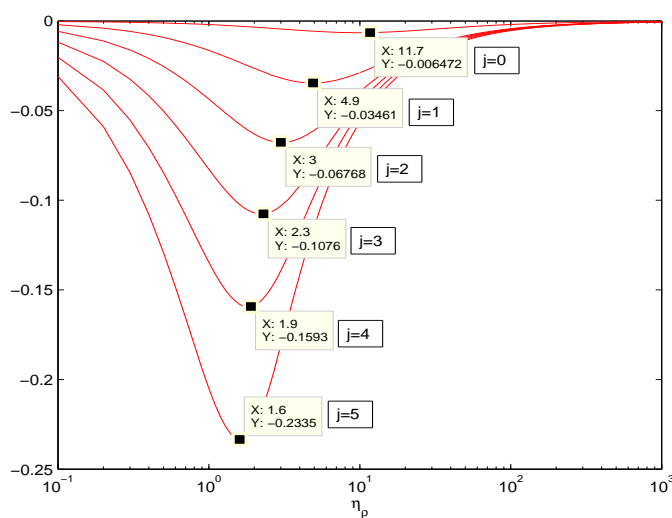


Figure 1.15 – Evolution de la partie imaginaire des  $j$  premières fréquences de résonance  $k_{10,r}^j$  du mode 10 en fonction de  $\eta_\rho$ , pour  $L = 1m$  et  $b = 0,1m$ .



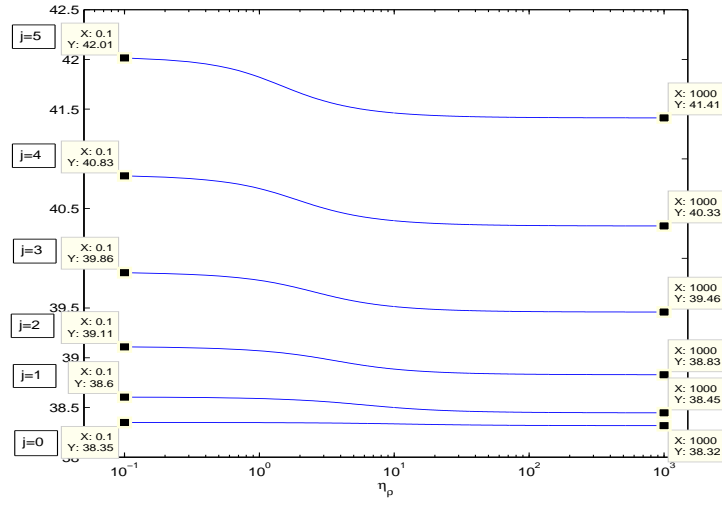


Figure 1.16 – Evolution de la partie réelle des  $j$  premières fréquences de résonance  $k_{01,r}^j$  du mode 01 en fonction de  $\eta_\rho$ , pour  $L = 1m$  et  $b = 0,1m$ .

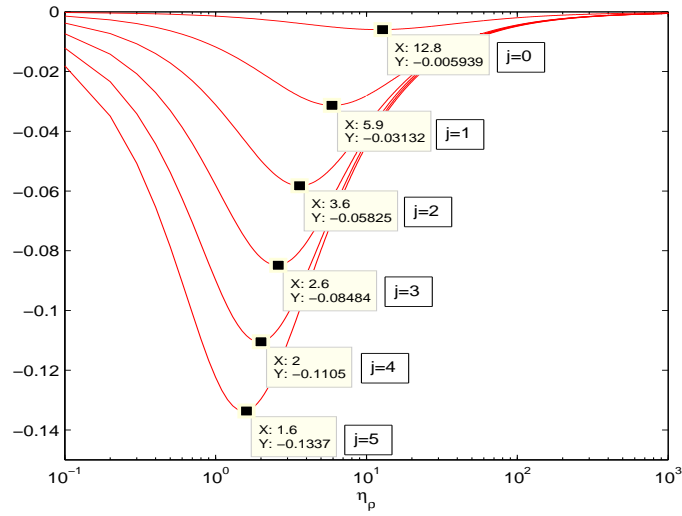


Figure 1.17 – Evolution de la partie imaginaire des  $j$  premières fréquences de résonance  $k_{01,r}^j$  du mode 01 en fonction de  $\eta_\rho$ , pour  $L = 1m$  et  $b = 0,1m$ .

## 1.4 Bilan du premier chapitre

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté le système étudié ainsi que le système d'équations utilisé. Ce dernier est basé sur un système d'impédance ramenée, permettant d'obtenir la fonction de Green interne avec la présence d'un point source, en tenant compte des conditions aux limites de notre cylindre. La condition de rayonnement permettant de décrire le couplage avec le milieu extérieur est décrite à l'aide d'une matrice impédance de rayonnement multimodale. Pour cela, nous nous sommes basés sur la formulation de Zorumski [8], dont nous avons étendu le domaine de validité aux fréquences complexes. Nous avons donc défini parfaitement la fonction de Green  $\Gamma(M, M', \omega)$  en tout point à l'intérieur de notre conduit à l'aide d'une représentation modale du problème.

Par la suite, nous nous sommes intéressés aux fréquences de résonance complexes d'un résonateur cylindrique avec la présence d'un écran infini. Ces dernières sont définies comme étant les pôles complexes de la fonction de Green interne du système. Leurs parties imaginaires correspondent aux pertes du système qui sont directement reliées au rayonnement de ce dernier (car ce sont les seules pertes que nous prenons en compte). Nous avons notamment pu voir l'intérêt de notre méthode par rapport à l'approximation du rayonnement par une correction de longueur. L'effet des modes de conduits d'ordres supérieurs (couplage intermodal) sur les résonances du système a également été étudié. Nous nous sommes aussi intéressés aux premières résonances des modes non plans ainsi qu'à l'effet de la masse volumique du fluide externe sur les résonances. Le but principal de ce travail était d'avoir un cas de référence avant de s'intéresser à des géométries de résonateurs plus complexes. Dans ce cas, nous n'avons plus directement accès à la fonction de Green comme c'était le cas précédemment où nous connaissions une expression de la fonction de Green en demi-espace libre du piston plan, avec un écran infini :  $-e^{ikh}/2\pi h$ . Nous allons alors utiliser une méthode numérique basée sur les éléments finis de frontière.

## Chapitre 2

# Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Présentation de la méthode d'éléments finis de frontière utilisée . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>2.2</b>	<b>Cas du cylindre de longueur finie . . . . .</b>	<b>56</b>
2.2.1	Limitation due à la taille de la boîte . . . . .	57
2.2.2	Limitation due à la taille des éléments . . . . .	59
<b>2.3</b>	<b>Fréquences de résonance pour différentes géométries . . . . .</b>	<b>63</b>
2.3.1	Pavillon de Bessel . . . . .	63
2.3.2	Etude de l'influence de la forme du pavillon de Bessel sur le rayonnement . . . . .	68
2.3.3	Cas du pavillon conique . . . . .	72
<b>2.4</b>	<b>Méthode hybride entre la théorie modale et les éléments finis de frontière . . . . .</b>	<b>73</b>
2.4.1	Système d'équations utilisé . . . . .	74
2.4.2	Projection sur les modes propres du tuyau . . . . .	75
2.4.3	Impédances à l'entrée d'un cylindre obtenues avec la méthode hybride . . . . .	77
2.4.4	Calcul des fréquences de résonance d'un cylindre à l'aide de $\mathbf{Z}_{\text{BEM}}$ . . . . .	81
2.4.5	Résonateurs avec pavillons . . . . .	84
<b>2.5</b>	<b>Bilan du deuxième chapitre . . . . .</b>	<b>90</b>

---

Nous allons maintenant nous intéresser aux résonances de résonateurs de longueur finie ayant des géométries plus complexes que le simple tuyau cylindrique étudié aux chapitres précédents. Ne connaissant pas de formulation analytique d'un tel problème, nous avons développé une méthode numérique basée sur les éléments finis de frontière. En effet, n'existant pas de logiciel dans le commerce nous permettant d'obtenir la fonction de Green complexe de notre système, nous avons dû développer un code programmé en Fortran.

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.1 Présentation de la méthode d'éléments finis de frontière utilisée

Dans un premier temps, nous rappelons le principe ainsi que les équations de base d'une telle méthode. Puis avant de s'attacher à l'étude de quelques résonateurs à géométries complexes telles que celles des pavillons, nous confronterons les résultats obtenus par les deux méthodes (éléments finis et méthode modale développée aux chapitres précédents) dans le cas d'un cylindre de longueur finie.

### 2.1 Présentation de la méthode d'éléments finis de frontière utilisée

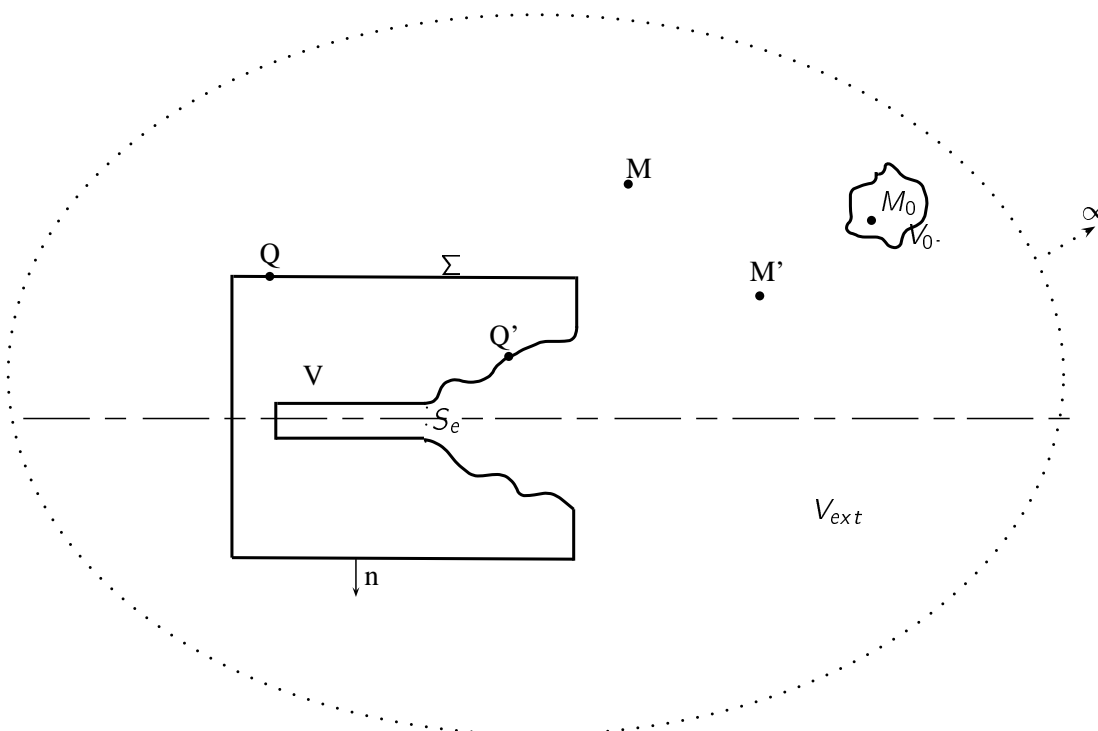


Figure 2.1 – Schématisation en coupe du problème étudié

Le problème ici étudié (qui est en trois dimensions) est schématisé en coupe par la figure 2.1, où nous pouvons voir l'objet étudié de surface  $\Sigma$  et de volume  $V$  dans un domaine  $V_{ext}$  non borné. Dans un premier temps nous considérons qu'il peut exister des sources dans  $V_{ext}$  de densité  $f(M_0)$ . Dans la suite, nous désignerons par  $M$  ou  $M'$  un point de  $V_{ext}$  extérieur aux sources, par  $M_0$  un point de  $V_0$  (domaine de  $V_{ext}$  où il existe des sources) et par  $Q$  et  $Q'$  un point de la surface  $\Sigma$ . Notons également, que nous avons choisi une normale  $\vec{n}$  sortante. Précisons ici que comme nous travaillons avec un espace non borné, nous devons imposer une condition de Sommerfeld qui nous permet de dire qu'aucune onde ne peut revenir de l'infini.

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.1 Présentation de la méthode d'éléments finis de frontière utilisée

Dans le cas général, la pression en un point  $M$  de coordonnées  $(r, \theta, z)$  est solution de :

$$(\Delta + k^2)p(M) = f(M_0), \quad (2.1)$$

Nous introduisons ici la fonction de Green  $G$  qui satisfait l'équation d'Helmholtz :

$$(\Delta + k^2)G(M, M') = \delta(M, M'), \quad (2.2)$$

où  $G(M, M')$  représente le champ créé en un point  $M$  de  $V_{ext}$  par une source ponctuelle unité placée en  $M'$ . Précisons que cette fonction est différente de la fonction  $\Gamma(M, M')$  introduite dans le premier chapitre.

La méthode consiste alors à multiplier l'équation (2.2) par  $p(M)$ , l'équation (2.1) par  $G(M, M')$ , faire la différence puis intégrer sur le volume  $V_{ext}$  et enfin appliquer le théorème de Green. Nous obtenons alors la représentation de Green de la pression qui est la base de la méthode d'éléments finis de frontière (BEM : Boundary Element Method en anglais) qui dans le cas général, s'exprime de la manière suivante :

$$\int_{V_{ext}} p(M')\delta(M, M')dV = p(M) = p_0(M) + \int_{\Sigma} [p(Q')\frac{\partial G(M, Q')}{\partial n(Q')} - G(M, Q')\frac{\partial p(Q')}{\partial n(Q')}]d\Sigma_{Q'} \quad (2.3)$$

Cette relation montre que la pression totale en un point  $M$  de l'espace non borné  $V_{ext}$  est composée de deux champs. Le premier, décrit par  $p_0(M) = \int_{V_0} f(M_0)G(M, M_0)dV_0$ , représente le champ acoustique créé par la source  $f(M_0)$  en l'absence de l'objet de surface  $\Sigma$ . Le second décrit le champ créé par l'objet diffractant de surface  $\Sigma$ , correspondant au rayonnement acoustique de ce dernier. L'intégrale sur la surface  $\Sigma$  traduisant cet effet de frontière peut elle même être vue comme la superposition de deux champs acoustiques, le premier créé par un potentiel de simple couche de densité  $-\frac{\partial p(Q')}{\partial n(Q')}$  et le second par un potentiel de double couche de densité  $p(Q')$ .

Dans le problème qui nous intéresse, le point d'observation  $M$  est situé sur la surface  $S$  (ainsi  $M \equiv Q$ ) et non plus dans l'espace libre  $V_{ext}$  à l'extérieur de celle-ci comme dans l'équation (2.3) qui devient alors :

$$\frac{1}{2}p(Q) = p_0(Q) + \int_{\Sigma} [p(Q')\frac{\partial G(Q, Q')}{\partial n(Q')} - G(Q, Q')\frac{\partial p(Q')}{\partial n(Q')}]d\Sigma_{Q'}. \quad (2.4)$$

Le facteur  $1/2$  vient du fait que le potentiel de double couche de densité  $p(Q')$  possède une discontinuité à la traversée de la surface  $\Sigma$  dont les valeurs limites sont, d'après [27] p.15 :

$$\lim_{M \rightarrow Q} \int_{\Sigma} [p(Q')\frac{\partial G(M, Q')}{\partial n(Q')}]d\Sigma_{Q'} = \frac{p(Q)}{2} + \int_{\Sigma} p(Q')\frac{\partial G(Q, Q')}{\partial n(Q')}d\Sigma_{Q'}.$$

La méthode BEM est basée sur une discrétisation de la surface  $\Sigma$  en un nombre  $N_e$  d'éléments finis, tel que :

$$\bigcup_{j=1}^{N_e} S_j \simeq \Sigma, \quad (2.5)$$

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.1 Présentation de la méthode d'éléments finis de frontière utilisée

Dans notre cas, nous avons choisi de discrétiser la surface par des éléments de forme triangulaire. Nous verrons plus tard, que la précision du résultat est directement liée au nombre d'éléments utilisés. D'après la discrétisation (2.5), la relation (2.4) devient :

$$\frac{1}{2}p(Q) = \int_{V_0} f(M_0)G(M, M_0)dV_0 + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{S_j} [p(Q') \frac{\partial G(Q, Q')}{\partial n(Q')} - G(Q, Q') \frac{\partial p(Q')}{\partial n(Q')}] d\Sigma_{Q'} \quad (2.6)$$

Nous cherchons les inconnues  $P(Q)$  et  $\partial P(Q)/\partial n(Q)$  sous la forme :

$$p(Q) = \sum_{i=1}^{N_e} p_i \gamma_i(Q),$$

et

$$\partial p(Q)/\partial n(Q) = \sum_{i=1}^{N_e} T_i \gamma_i(Q),$$

où  $\gamma_i(Q)$  est la fonction d'approximation choisie ici comme la fonction caractéristique de la surface  $S_i$  (i.e.  $\gamma_i(Q)$  vaut 1 si  $Q$  appartient à la surface  $S_i$  et est nulle sinon). Ces fonctions étant donc supposées constantes sur chaque élément de surface, nous avons choisi de calculer  $p_i$  et  $T_i$  comme la valeur au centre de chaque élément de la fonction correspondante. Nous écrivons ainsi :

$$p_i = p(Q_i),$$

et

$$T_i = \frac{\partial p(Q_i)}{\partial n},$$

où  $Q_i$  est le centre du triangle.

Nous utilisons l'indice  $j$  lorsque nos fonctions se trouvent au point  $Q'$  qui appartient à la surface  $S_j$ .

Ainsi, la pression aux  $N_e$  points  $Q_i$  s'exprime sous la forme :

$$\frac{1}{2}p_i = \int_{V_0} f(M_0)G(Q_i, M_0)dV_0 + \sum_{j=1}^{N_e} p_j \int_{S_j} \left( \frac{\partial G(Q_i, Q')}{\partial n} \right)_{Q'} d\Sigma_{Q'} - \sum_{j=1}^{N_e} T_j \int_{S_j} G(Q_i, Q') d\Sigma_{Q'} \quad (2.7)$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{2}p_i = F_i + \sum_{j=1}^{N_e} p_j D_{1,ij} - \sum_{j=1}^{N_e} M_{2,ij} T_j, \quad (2.8)$$

avec  $D_{1,ij} = \int_{S_j} \left( \frac{\partial G(Q_i, Q')}{\partial n} \right)_{Q'} d\Sigma_{Q'}$ ,  $M_{2,ij} = \int_{S_j} G(Q_i, Q') d\Sigma_{Q'}$  et  $F_i = \int_{V_0} f(M_0)G(Q_i, M_0)dV_0$ .

En regroupant les inconnues  $p_j$  et  $T_j$ , le problème (2.8) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sum_{j=1}^{N_e} \left[ \frac{1}{2} \delta_{ij} - D_{1,ij} \right] p_j - \sum_{j=1}^{N_e} M_{2,ij} T_j = F_i, \quad (2.9)$$

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.1 Présentation de la méthode d'éléments finis de frontière utilisée

soit, de façon matricielle :

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{p} - \mathbf{M}_2 \mathbf{T} = \mathbf{F}, \quad (2.10)$$

où  $\mathbf{M}_1$  est une matrice carrée de taille  $(N_e * N_e)$  constituée des éléments

$$M_{1,ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} - \left( \frac{\partial G(Q_i, Q')}{\partial n} \right)_{Q'} d\Sigma_{Q'},$$

la matrice  $\mathbf{M}_2$  de taille  $(N_e * N_e)$  et le vecteur  $\mathbf{F}$  de taille  $N_e$  sont constitués respectivement des éléments  $M_{2,ij}$  et  $F_i$  définis précédemment.

Deux cas se présentent alors :

- Lorsque la condition aux limites sur la surface  $\Sigma$  est de type Neumann ou Dirichlet, nous avons les éléments de  $T$  ou de  $P$  qui sont nuls et le système à étudier devient, dans le cas d'une condition de Neumann :

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{p} = \mathbf{F},$$

et dans le cas d'une condition de Dirichlet :

$$-\mathbf{M}_2 \mathbf{T} = \mathbf{F}.$$

Nous sommes alors ramenés à un système matriciel à  $N_e$  inconnues ( $\mathbf{p}$  pour Neumann et  $\mathbf{T}$  pour Dirichlet) et le système est soluble si la matrice correspondante ( $\mathbf{M}_1$  ou  $\mathbf{M}_2$ ) est inversible. Le système est insoluble lorsque la matrice est singulière (i.e. lorsque son déterminant est nul). Les fréquences correspondantes sont les fréquences de résonances. Hors résonances, nous avons évidemment  $\mathbf{p} = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{F}$  ou  $\mathbf{T} = \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{F}$ . La recherche des résonances passe donc par la recherche des fréquences pour lesquelles  $\mathbf{M}_1$  (ou  $\mathbf{M}_2$ ) est non inversible, soit telle que  $\det \mathbf{M}_1 = 0$  (ou  $\det \mathbf{M}_2 = 0$ ).

- Lorsque la condition aux limites n'est pas uniformément Neumann ou Dirichlet, par exemple si sur une partie  $S_e$  de la surface  $\Sigma$ , nous avons une vitesse non nulle, nous avons alors des inconnues supplémentaires. Nous devons donc rajouter des équations dans notre système, par exemple imposer une vitesse sur les  $N_{S_e}$  points de la surface  $S_e$ . C'est ce que nous ferons lorsque nous développerons la méthode hybride présentée à la fin de ce chapitre.

C'est donc ce système d'équations qui est programmée dans le code Fortran utilisé qui est une adaptation d'un code développé par Régine Guillermin au LMA. Dans un premier temps, nous travaillons avec une condition de Neumann sur la surface de notre système, comme dans le cas analytique (théorie modale) décrit aux chapitres précédents. Nous choisissons de plus d'étudier seulement le champ acoustique correspondant au rayonnement de l'objet de surface  $S$ . Nous considérons donc qu'il n'y a pas de source au sein du fluide ( $\mathbf{F} = \emptyset$ ), ainsi le second membre de la relation 2.10 est nul. Le problème peut alors se simplifier de la manière suivante :

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{p} = 0. \quad (2.11)$$

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.2 Cas du cylindre de longueur finie

---

Pour trouver les valeurs propres de  $\mathbf{M}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{I} - \int_S \frac{\partial G(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}')}{\partial n} dS_{Q'}$ , nous allons donc chercher les zéros de son déterminant. En général, de telles matrices à diagonales dominantes ne sont pas singulières, nous pouvons donc calculer leur déterminant par décomposition LU (voir Numerical Recipes p34-42 [26]) sans recherche de pivot, ce qui permet d'accélérer considérablement le calcul. Ainsi, si cette matrice devient singulière, c'est que nous sommes sur un zéro. Dans la suite toutes les inversions de matrices dont nous avons besoin sont calculées à partir d'une décomposition LU, dont nous avons développé une version parallélisée en OPEN MP, ce qui nous permet d'avoir un gain de temps sensiblement proportionnel au nombre de processeurs utilisés (limité à 16 au LMA). Comme précédemment, la recherche des résonances (correspondant aux zéros du déterminant de la matrice  $\mathbf{M}_1$ ) se fait à l'aide d'une méthode de Newton dans le plan complexe (avec la même précision que celle décrite au chapitre 2), où la dérivée du déterminant par rapport à la fréquence est encore estimée numériquement par différences finies. Notons que, comme dans le cas analytique, les fréquences de résonance correspondent aux singularités du système.

Avant d'étudier le rayonnement pour des géométries de résonateurs complexes, nous avons choisi de nous intéresser au cas du cylindre de longueur finie, afin de tester notre méthode d'éléments finis sur un cas de référence dont nous avons déjà obtenu les fréquences de résonances par la méthode modale au chapitre précédent. De plus, cela va nous permettre de tester différentes approximations dues à la méthode BEM telles que la taille des éléments.

## 2.2 Cas du cylindre de longueur finie

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes intéressés au cas d'un cylindre de longueur finie avec un écran infini. Avec une méthode numérique d'éléments finis directe, nous ne pouvons pas reproduire un système avec un tel écran car nous sommes dans l'obligation d'avoir une surface fermée séparant deux domaines disjoints. Nous avons alors choisi de le remplacer par une boîte de dimensions finies à l'intérieur de laquelle nous insérons le cylindre de longueur finie, comme le montre la figure 2.2. Précisons qu'à l'origine le programme créant le maillage du système, développé par P. Herzog au LMA (dans un code Matlab), ne nous permet pas d'obtenir une autre géométrie extérieure que celle d'une boîte parallélépipédique. En effet, à la base celui-ci a été conçu pour étudier le comportement de haut-parleurs qui sont alors insérés dans des écrans afin d'éviter certains phénomènes non souhaités (notamment le court circuit acoustique dont la fréquence d'apparition est diminuée avec la présence d'un écran). Notons tout de même que par la suite nous avons réussi à modifier ce programme afin de s'affranchir de la géométrie parallélépipédique de la boîte. Il existe une norme pour la taille des boîtes à utiliser dont la face avant à la taille de l'écran défini dans la norme CEI 268-5 [28]. Dans un premier temps, nous utilisons trois tailles de boîtes différentes : une boîte de taille CEI ( $l_x = 1,35m$ ,  $l_y = 1,65m$  et  $l_z = 0,594$ ), une autre de taille CEI/2 ( $l_x = 0,675m$ ,  $l_y = 0,825m$  et  $l_z = 0,594m$ ) et une dernière de taille CEI/3 ( $l_x = 0,45m$ ,  $l_y = 0,55m$  et  $l_z = 0,594m$ ), avec un cylindre de rayon  $b = 0,047m$  et de longueur  $L = 0,5m$ . Ceci va nous permettre de voir dans quelle mesure la taille de la boîte est influente sur la justesse et la précision des résultats.



Précisons ici, que les grandeurs  $l_x$ ,  $l_y$  et  $l_z$  sont différentes les unes des autres et que la sortie du cylindre n'est pas centrée dans la boîte afin de limiter les effets de diffraction aux bords (d'après la norme CEI 268-5).

Nous utilisons des maillages de différentes tailles sur la boîte et sur le cylindre, ce qui nous donnera la limitation fréquentielle due à la taille des éléments. Précisons ici qu'un maillage dont la longueur caractéristique de l'élément est de  $x$  cm sur le tube et de  $y$  cm sur la boîte est noté par la suite TxBy.

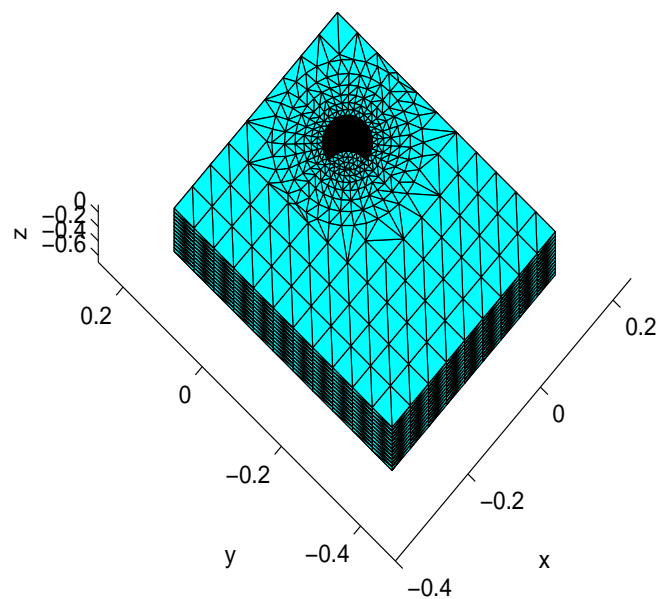


Figure 2.2 – Schéma du système étudié avec une boîte de dimension CEI/3 avec un maillage de 5cm sur la boîte et de 1 cm sur le tube

#### 2.2.1 Limitation due à la taille de la boîte

Le principal problème causé par la boîte est la présence de fréquences propres irrégulières du problème intérieur. Dans notre formulation du problème, le fait d'imposer une condition de Neumann sur un côté de l'élément, impose une condition de Dirichlet de l'autre côté (voir les explications dans [29]), qui est dans notre cas, à l'intérieur de la boîte. Précisons que ces fréquences propres irrégulières ont une partie imaginaire nulle mais que celle ci peut devenir non nulle si la précision du calcul est mauvaise (nombre ou taille des éléments trop

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.2 Cas du cylindre de longueur finie

faible) et vont alors se rapprocher des résonances du cylindre. Le fait de travailler dans le plan complexe est donc ici très pratique car cela va nous permettre de voir la limite de validité de nos maillages. Il est facile d'imaginer que plus la boîte est grande, plus ces fréquences irrégulières apparaissent en basses fréquences et perturbent rapidement les fréquences de résonance du cylindre. La table 2.1 nous montre que nous n'arrivons plus à distinguer les résonances de la boîte et celle du tube (ce qui est indiqué par une case blanche) à partir d'environ 800Hz pour la boîte CEI, 1200Hz pour la boîte CEI/2 et 2200Hz pour la boîte CEI/3. A ceci vient s'ajouter le coût de calcul, car plus la boîte est grande, plus le nombre d'éléments est élevé et plus le temps de calcul des résonances est long.

Nous devons quand même remarquer que l'influence de la taille de l'écran (correspondant à la taille de la face avant de la boîte) a seulement de l'importance à très basses fréquences (ici seulement sur la première fréquence de résonance où la partie imaginaire est divisée par 2 entre la configuration CEI et celles CEI/2 et CEI/3).

$j$	CEI	CEI/2	CEI/3	Modale 0HM	Modale 1HM
0	156,25-1,02i	156,31-0,67i	156,04-0,52i	157,52-0,93i	157,9-0,93i
1	473,16-8,05i	473,31-8,06i	471,31-7,42i	474,62-7,56i	475,76-7,63i
2	795,27-18,89i	795,4-18,75i	792,71-18,53i	796,05-18,02i	797,95-18,24i
3	—	1127,8-28,43i	1116,9-26,69i	1121,4-29,65i	1124,3-30,14i
4	—	—	1459,4-32,33i	1449,4-41,45i	1453,6-42,21i
5	—	—	1779,9-44,63i	1779,2-53,14i	1785-54,11i
6	—	—	2149,4-59,07i	2109,9-65,04i	2118,1-65,86i
$t_i$ (s)	6	1,8	1,2	0,12	0,15

Table 2.1 – Fréquences de résonance du cylindre ( $L=0,5\text{m}$  et  $b=0,047\text{m}$ ) obtenues pour différentes boîtes, avec un maillage de 2 cm sur le tube et de 10 cm sur la boîte (T2B10), et celles obtenues avec la méthode modale ( $t_i$  est le temps d'itération par fréquence en secondes).

Par la suite, pour des raisons de temps de calcul, nous travaillerons avec une boîte de dimension CEI/3 (qui donne une bonne approximation d'un écran infini sauf en basses fréquences).

### 2.2.2 Limitation due à la taille des éléments

Un autre facteur très important pour la précision du calcul est la taille des éléments utilisés. Si nous comparons les résonances obtenues par la méthode d'éléments finis de frontière avec des éléments de  $10\text{cm}$  sur la boîte et de  $2\text{cm}$  sur le tube (noté T2B10) avec les résonances exactes obtenues par la méthode modale présentée au chapitre précédent, nous nous apercevons que les résultats sont en accord jusqu'à une fréquence d'environ  $1000\text{Hz}$  (voir tableau 2.1). Ceci correspond à une longueur d'onde  $\lambda = c/f = 0.34\text{m}$  (avec  $c = 340\text{m.s}^{-1}$ ) soit environ 3 éléments par longueur d'onde pour la boîte et 17 éléments par longueur d'onde pour le tube. C'est donc ici la taille des éléments de la boîte qui nous limite en fréquence.

Nous trouvons dans la table 2.2 les valeurs des résonances du cylindre pour une boîte de taille CEI/3 avec différents maillages dont les valeurs sont tracées sur la figure 2.3.

$j$	CEI/3 T2B10	CEI/3 T2B5	CEI/3 T2B2,5	CEI/3 T1B5	Modale 1 HM
0	156,04-0,52i	156,98-0,53i	157,29 -0,53i	157,89-0,55i	157,9-0,93i
1	471,31-7,42i	474,06-7,31i	474,29-7,2i	474,54-7,54i	475,76-7,63i
2	792,71-18,53i	796,8-18,7i	796,2-18,86i	797,27-19,35i	797,95-18,24i
3	1116,9-26,69i	1123,8-27,72i	1124,3-27,8i	1124,3-29,02i	1124,3-30,14i
4	1459,4-32,33i	1449,9-36,76i	1450,3-37,29i	1450,7-39,7i	1453,6-42,21i
5	1779,8-44,63i	1781,7-48,7i	1780,8-48,67i	1782,3-52,71i	1785-54,11i
6	2149,4-59,07i	2115,3-56,86i	2116-58,5i	2115-63,41i	2118,1-65,86i
7	—	2448,9-66,53i	2449-67,7i	2448,2-73,49i	2452,6-77,65i
8	—	2783,3-77,73i	2783,5-78,5i	2783,6-85,72i	2788,48-89,66i
9	—	—	3118-87,56i	3121-98,33i	3125,9-102,11i
10	—	—	3459-94,74i	3461-110i	3465,3-115,15i
$t_i$ (s)	1,2	5	22	120	0,15

Table 2.2 – Fréquences de résonance du cylindre ( $L=0,5\text{m}$  et  $b=0,047\text{m}$ ) obtenues avec une boîte de dimension CEI/3 pour différents maillages et celles obtenues avec la méthode modale ( $t_i$  est le temps d'itération par fréquence).

Le principal résultat que nous observons est l'influence de la taille du maillage sur le tube. En effet, nous remarquons que pour un maillage identique sur la boîte (de  $5\text{cm}$ ), nous ne retrouvons pas du tout les mêmes valeurs pour les fréquences de résonances si le maillage sur le tube est différent. Si le maillage sur le tube est de  $2\text{cm}$ , les résonances sont différentes de celles obtenues par la méthode modale lorsque la fréquence dépasse  $800\text{Hz}$ . A cette fréquence la longueur d'onde est de  $0,425\text{m}$ , nous avons donc 21 éléments par longueur d'onde sur le tube. Pour avoir le même nombre d'éléments par longueur d'onde à  $2500\text{Hz}$  ( $\lambda = 0,14\text{m}$ ), les éléments doivent mesurer environ  $1\text{cm}$ . Nous observons ainsi à l'aide de la table 2.2 que si le maillage sur le tube est de  $1\text{cm}$ , les deux méthodes donnent des résultats très proches (sauf en très basses fréquences mais ceci est dû à la taille de la boîte qui reproduit mal l'effet du écran infini) jusqu'à  $2000/2500\text{ Hz}$ . Notons tout de

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.2 Cas du cylindre de longueur finie

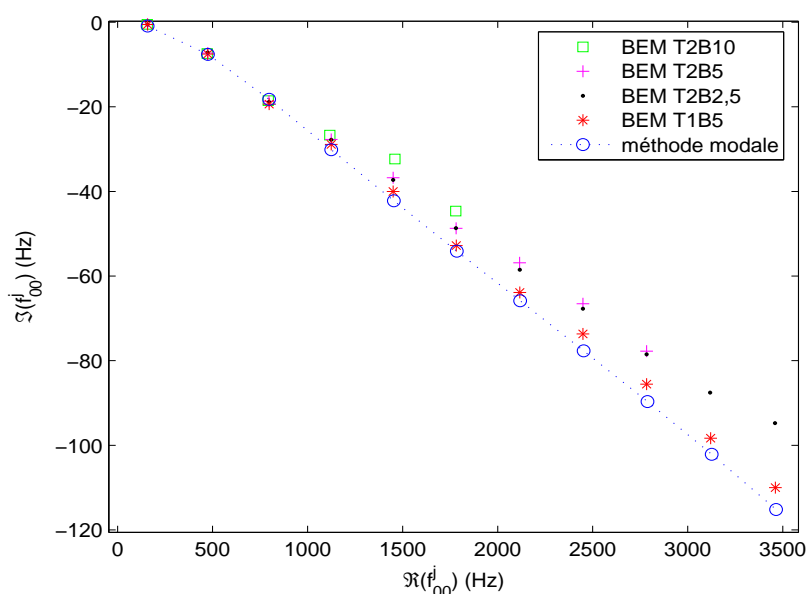


Figure 2.3 – Fréquences de résonance d'un cylindre de longueur  $L = 0,5m$  et de rayon  $b = 0,047m$  obtenues par méthode modale avec 1 H.M et par méthode BEM pour différents maillages avec une boîte de taille CEI/3.

même que les parties réelles des fréquences de résonance obtenues avec la méthode BEM sont sensiblement inférieures à celles obtenues avec la méthode modale. Cela traduit donc un effet de rayonnement plus important avec la méthode numérique. Ceci peut s'expliquer par le fait que la surface d'entrée du cylindre est maillée par l'intérieur, ce qui implique un rayon plus petit dans le cas numérique. Ainsi la correction de longueur  $\Delta L/b$  est supérieur ce qui implique une partie réelle des fréquences de résonance inférieure.

Précisons que les cases vides dans la table 2.2 traduisent comme précédemment, le fait que nous ne pouvons pas distinguer les fréquences propres irrégulières des fréquences de résonances du cylindre, comme nous pouvons le voir sur la figure 2.4 représentant une cartographie de la fonction de Green dans le plan complexe (en traçant les lignes de contours) pour une boîte de taille CEI/3, avec un maillage de  $10cm$  sur la boîte et de  $2cm$  sur le tube. En effet, il est intéressant de voir que sur la figure 2.4, nous voyons bien les fréquences de résonances du tube (qui sont encadrées) ainsi que les fréquences parasites. Dans ce cas, les fréquences de résonance du tube ne sont plus valables à partir de  $1000Hz$  (les fréquences propres irrégulières ont alors une partie imaginaire non négligeable ce qui est l'effet d'un maillage trop grossier) et nous ne pouvons plus les distinguer des fréquences irrégulières à partir de  $1500Hz$ .

Nous pouvons observer sur la figure 2.5 une cartographie de  $\det \mathbf{M}_1$  dans le plan complexe pour le cas d'une boîte CEI/3 avec un maillage de  $5cm$  sur la boîte et de  $1cm$  sur

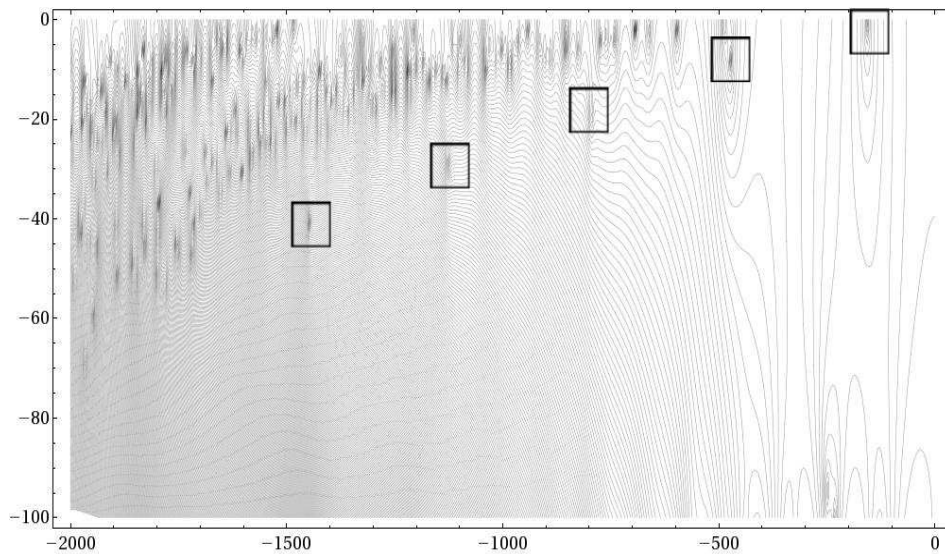


Figure 2.4 – Cartographie de  $\det \mathbf{M}_1$  dans le plan complexe (partie réelle de la fréquence en abscisse et partie imaginaire en ordonnée) pour le cas d'une boîte CEI/3 avec maillage de 10cm sur la boîte et de 2cm sur le tube (T2B10).

le tube. Nous observons sur ces figures les résonances du tube (qui sont encadrées) et les fréquences propres irrégulières du problème intérieur. Nous nous apercevons que lorsque la fréquence est supérieure à 2000Hz les fréquences propres irrégulières commencent à s'éloigner de l'axe des abscisses (correspondant ici à la partie réelle de la fréquence), ce qui montre la limite de validité de notre maillage trop grossier. A 2000 Hz nous avons  $\lambda = 0,17m$  ce qui nous donne environ 3 éléments par longueur d'onde sur la boîte. Pour avoir le même nombre d'éléments par longueur d'onde sur la boîte à 4000Hz ( $\lambda = 0,085m$ ), les éléments sur celle-ci doivent alors mesurer environ 3cm. Nous nous apercevons ainsi que la limitation première pour la taille des éléments concerne ceux maillant le tube mais que le maillage de la boîte influence aussi la précision du résultat, mais dans une moindre mesure. En effet, le champ diffracté par les faces de la boîte éloignées de l'ouverture ont peu d'effet sur le champ acoustique interne du cylindre. Alors que le champ au voisinage immédiat de l'embouchure qui est prépondérant est discrétisé plus finement que le reste de la boîte (voir l'exemple de maillage sur la figure 2.2).

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.2 Cas du cylindre de longueur finie

---

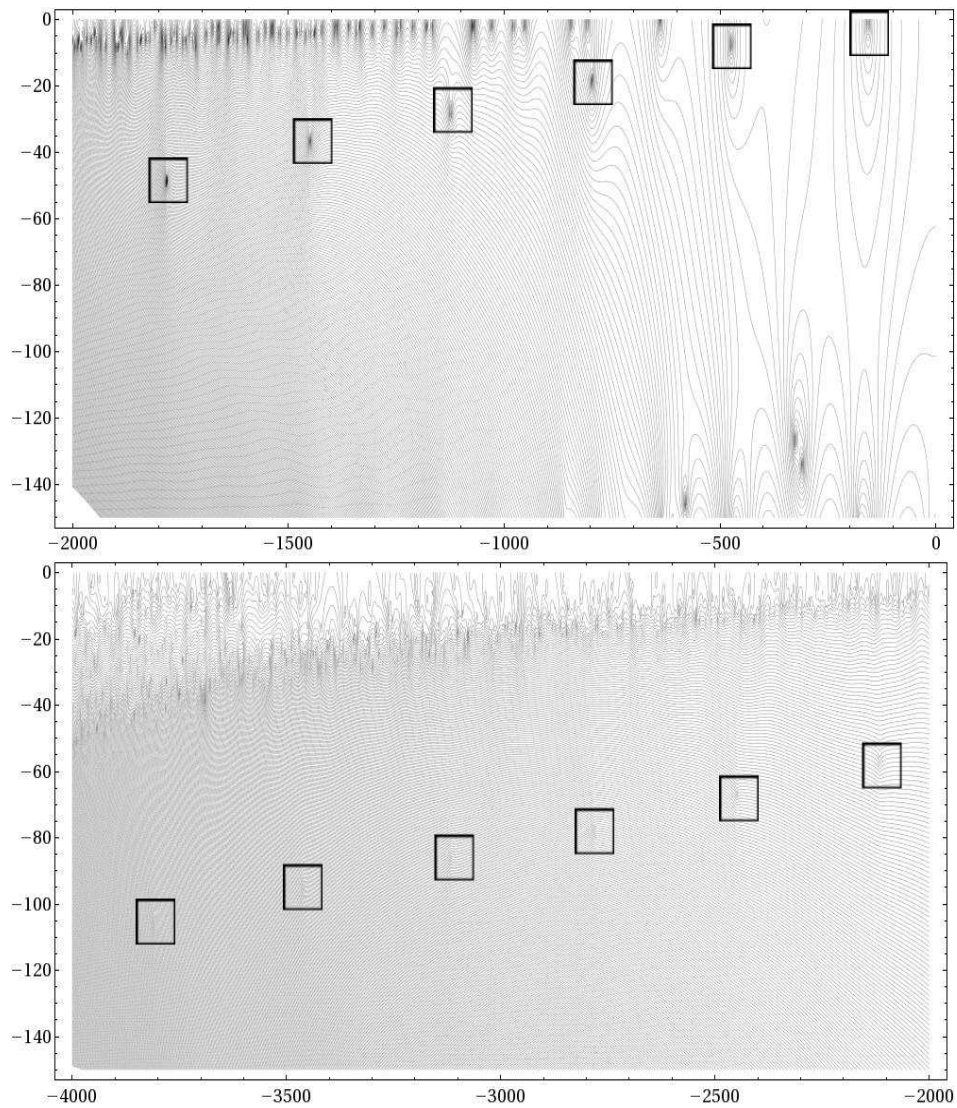


Figure 2.5 – Cartographie de  $\det \mathbf{M}_1$  dans le plan complexe (partie réelle de la fréquence en abscisse et partie imaginaire en ordonnée) pour le cas d'une boîte CEI/3 avec maillage de 5cm sur la boîte et de 1cm sur le tube (T1B5).

Si nous nous intéressons seulement à la partie réelle des fréquences de résonances, nous pouvons comparer nos résultats à ceux obtenus avec la méthode modale en utilisant la correction de longueur, que nous calculons avec la relation :

$$\Delta L = \frac{(2j+1)\pi}{2\Re(k_{00,r}^j)} - L.$$

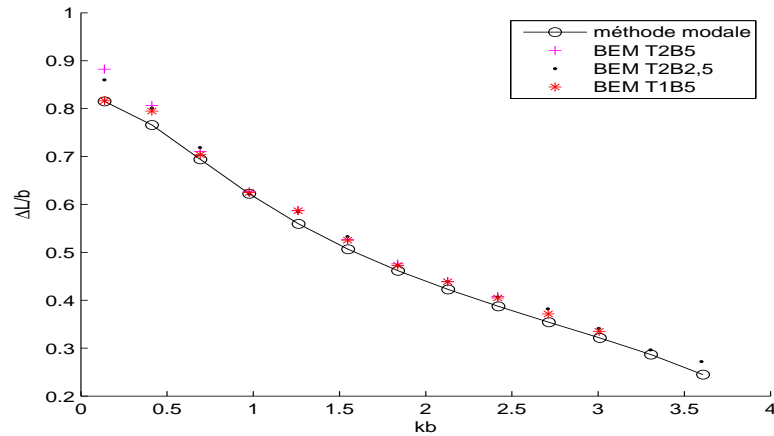


Figure 2.6 – Correction de longueur  $\Delta L/b$  pour différents maillages avec une boîte de taille CEI/3 ainsi que celle obtenue avec les résultats de la méthode modale avec 1 H.M.

Nous voyons sur la figure 2.6 que les résultats sont similaires pour les différents maillages avec les valeurs obtenues par la méthode modale, sauf en très basses fréquences si le maillage du tube est trop grossier.

Tous les résultats obtenus dans cette partie nous permettent de valider notre code d'éléments finis dans le cas de référence du cylindre de longueur finie.

## 2.3 Fréquences de résonance pour différentes géométries

Nous possédons maintenant tous les outils nécessaires pour calculer les fréquences de résonance d'un système *tube+pavillon*. Dans cette partie, nous allons présenter quelques résultats montrant le lien entre la forme du résonateur (ici c'est la forme du pavillon qui est modifiée) et ses fréquences de résonance qui nous donnent directement une information sur le rayonnement du système.

### 2.3.1 Pavillon de Bessel

Les pavillons de Bessel sont souvent utilisés pour approcher la forme des pavillons d'instruments de musique de la famille des cuivres (voir [30]) ou encore dans le domaine audio

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.3 Fréquences de résonance pour différentes géométries

dans la réalisation de pavillons pour enceintes acoustiques. Nous obtenons une approximation de la forme de tels pavillons en utilisant un développement des fonctions de Bessel, d'où leur nom. Nous pouvons écrire le rayon  $R(x)$  sous la forme (d'après [31]) :

$$R(x) = \frac{\beta}{(x_a - x)^\nu}, \quad (2.12)$$

où les trois constantes  $\beta$ ,  $x_a$  et  $\nu$  sont obtenus par ajustement. Le coefficient  $\nu$ , appelé paramètre de forme, vaut entre 0,5 et 0,65 pour les trompettes et les trombones ce qui équivaut à un évasement très rapide. Si ce paramètre se rapproche ou dépasse l'unité, nous avons alors un évasement plus lent, c'est le cas des cors ou des cornets. Pour le cas du cylindre nous avons  $\nu = 0$  et pour le cône  $\nu = -1$ . Dans notre cas nous travaillons dans un premier temps avec  $\nu = 0,5$  pour un pavillon de longueur 0,5m avec un rayon d'entrée de  $r_{initial} = 0,064m$  et un rayon de sortie de  $r_{final} = 0,25m$  (voir figure 2.7), ce qui s'obtient avec  $\beta = 0,0468$  et  $x_a = 0,535$ . Ces grandeurs ont été choisies pour faciliter la réalisation expérimentale présentée au chapitre suivant, tout en restant dans des rapports entre les dimensions qui sont comparables à ceux que nous retrouvons dans diverses applications. Par exemple dans le cas de la clarinette, nous avons un rapport entre la longueur totale de l'instrument et la longueur de la partie non cylindrique de 0,3 (dans notre cas il est de 1/3) et un rapport  $r_{final}/r_{initial} = 3,6$  (dans notre cas  $r_{final}/r_{initial} = 3,9$ ). Les valeurs de la perce interne de la clarinette proviennent de celles données dans le logiciel Tubelab.

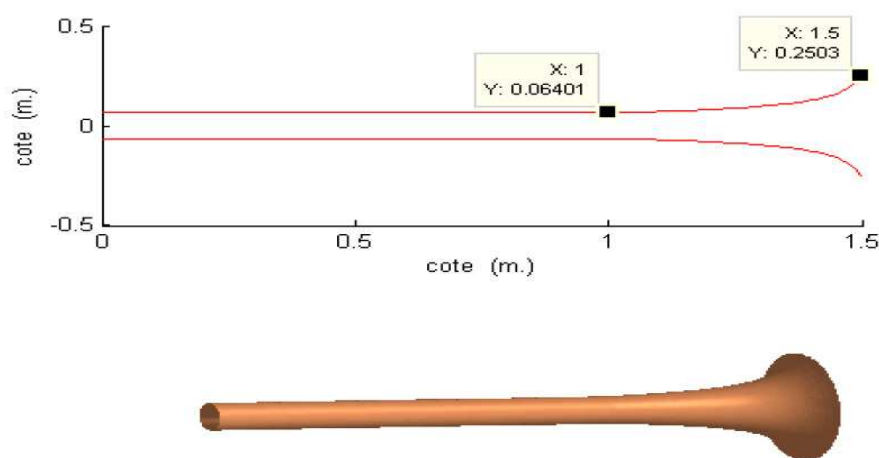


Figure 2.7 – Profil du système étudié : tube cylindrique de longueur  $L = 1m$  et de rayon  $b = 0,064m$  avec un pavillon de de longueur 0,5m avec un rayon d'entrée de 0,064m, un rayon de sortie de 0,25m et un paramètre de forme  $\nu = 0,5$ .

Nous pouvons voir sur la figure 2.8 que l'ajout du pavillon de Bessel augmente fortement la partie imaginaire des résonances par rapport au cas du cylindre. Sur la figure 2.9 nous pouvons voir le facteur de pertes  $\zeta(f_{00,r}^j)$  (défini comme le rapport  $|\Im(f_{00,r}^j)/\Re(f_{00,r}^j)|$ ) du



système *cylindre+pavillon* ainsi que celui d'un simple cylindre. Nous remarquons alors que le facteur de pertes dans le cas du pavillon tend vers une valeur maximale correspondant à une valeur maximale d'énergie rayonnée.

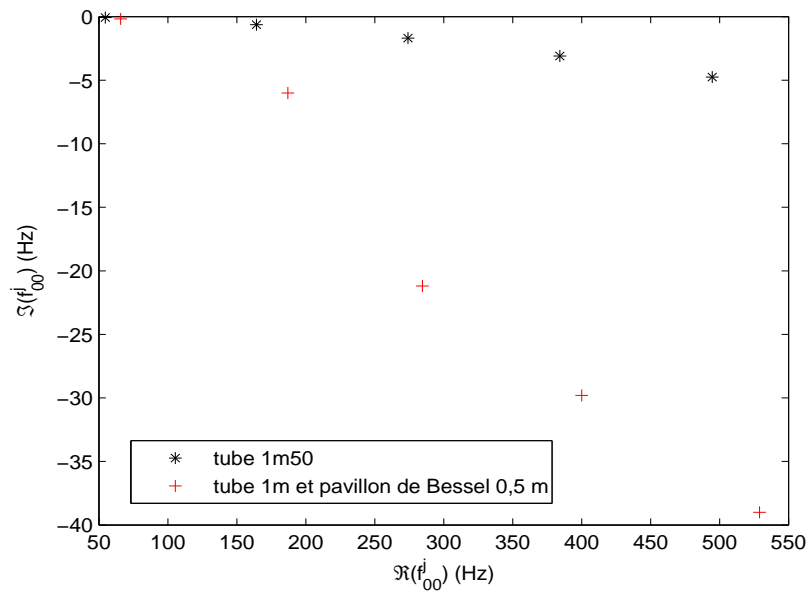


Figure 2.8 – Fréquences de résonance dans le cas d'un tube cylindrique de 1m50 (méthode modale \*) comparées à celles d'un tube cylindrique de 1m avec un pavillon de Bessel de 0,5m(méthode BEM T2B8 +).

Si nous regardons seulement la partie réelle des fréquences de résonance, nous nous apercevons à l'aide de la table 2.3 que l'ajout du pavillon amène les résonances dans un rapport d'harmoniques paires contrairement à celles du tuyau qui sont dans un rapport d'harmoniques impaires. Précisons, que nous pouvons également faire le rapport de la résonance  $n + 1$  par rapport à la résonance  $n$ , ce qui fait alors apparaître, suivant la valeur du paramètre de forme  $\nu$ , une série complète d'harmoniques (voir exemple dans [31]). Ceci est très utile pour la facture instrumentale comme l'explique Benade dans [30].

Nous remarquons également que l'ajout d'un pavillon entraîne l'augmentation de la partie réelle des fréquences de résonance, ce qui peut s'exprimer comme une diminution de la correction de longueur par rapport au cas du cylindre. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'augmentation de l'efficacité du rayonnement implique une divergence moindre de la vitesse à la sortie du pavillon (impliquant une réduction de la masse d'air correspondante). Dans [31] p.290, il est défini une solution approchée pour obtenir la partie réelle des fré-

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.3 Fréquences de résonance pour différentes géométries

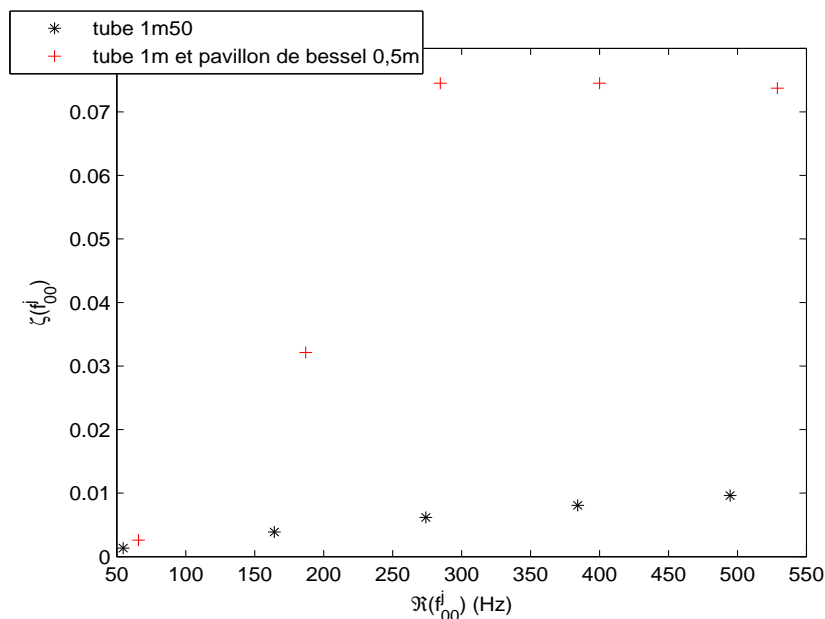


Figure 2.9 – Facteur de pertes ( $\zeta(f_{00,r}^j) = |\Im(f_{00,r}^j)|/\Re(f_{00,r}^j)$ ) en pourcentage dans le cas d'un tube cylindrique de 1m50 (méthode modale \*) comparées à celles d'un tube cylindrique de 1m avec un pavillon de Bessel de 0,5m (méthode BEM T2B8 +).

j	$\Re(f_{00,r}^j/f_{00,r}^0)$ sans pavillon	$\Re(f_{00,r}^j/f_{00,r}^0)$ avec pavillon
0	54,73/54,73=1	65,77/65,77=1
1	164,27/54,73=3	187/65,77=2,84
2	274,05/54,73=5,01	284,55/65,77=4,33
3	384,16/54,73=7,02	400/65,77=6,08
4	494,63/54,73=9,04	529/65,77=8,06

Table 2.3 – Rapport entre les différentes fréquences et la première résonance dans le cas d'un tuyau de 1m50 et dans le cas d'un tuyau de 1m avec un pavillon de Bessel de 0,5m.

quences de résonances de tels systèmes :

$$\Re(f_{00,r}^j) = \frac{c}{2(l + x_a)} \left[ j + 1 - \frac{1 - \nu}{2} \right], \quad (2.13)$$

avec  $x_a$  et  $\nu$  définis dans l'équation des pavillons de Bessel et  $l$  qui correspond à la longueur du cylindre.

Nous avons calculé les valeurs alors obtenues à partir de la relation (2.13) pour notre configuration ( $l = 1m$ ,  $x_a = 0,535$  et  $\nu = 0,5$  pour  $c = 340m/s$ ). Ces dernières sont reportées dans la table 2.4 et sont comparées aux valeurs obtenues avec notre méthode

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.3 Fréquences de résonance pour différentes géométries

d'éléments finis (maillage T2B8). Nous constatons que les résultats obtenus par les deux méthodes sont en bon accord sauf en très basses fréquences. Les valeurs obtenues avec la relation approchée 2.13, nous donne ainsi une bonne approximation de la partie réelle de nos résonances pour le système *cylindre+pavillon*, nous pouvons donc les utiliser comme point de départ de la méthode de Newton.

j	$\Re(f_{00,r}^j)$ d'après 2.13	$\Re(f_{00,r}^j)$ avec BEM	D en %
0	83,06	65,77	20,5
1	193,81	187	3,6
2	304,56	284,55	6,4
3	415,31	400	3,61
4	526,06	529	0,57

Table 2.4 – Partie réelle des fréquences de résonances (Hz) obtenues avec la relation (2.13) et avec la méthode BEM (maillage T2B8).

A partir de la relation (2.13), nous pouvons en extraire une relation pour connaître la longueur effective  $L_{eff}$  du pavillon en fonction de la fréquence, à partir de nos résultats :

$$L_{eff} = \frac{c}{2\Re(f_{00,r}^j)} \left[ j + 1 - \frac{1 - \nu}{2} \right] - l. \quad (2.14)$$

Nous pouvons voir les résultats pour les 5 premières fréquences de résonances dans la table 2.5. Nous nous apercevons que la longueur effective du pavillon est bien supérieure à la longueur physique de ce dernier ( $L_{physique=0,5m}$ ) surtout en basses fréquences où nous avons quasiment un rapport 2 entre les longueurs. Ces résultats sont en accords avec ceux présentés par Pyle dans [32].

j	$L_{eff}$ d'après 2.14 (m)
0	0,94
1	0,591
2	0,64
3	0,594
4	0,53

Table 2.5 – Longueur effective du pavillon (en m) à partir de la relation (2.14) en utilisant la partie réelle des fréquences de résonance (Hz) obtenues avec la méthode BEM (maillage T2B8) pour un tuyau de longueur  $l = 1m$  avec un pavillon de Bessel de  $0,5m$  et  $\nu = 0,5$ .

Précisons ici que le maillage utilisé pour obtenir ces résultats est de 2cm sur le pavillon et 8cm sur une boîte de taille CEI, ceci nous limite en fréquence autour de 500Hz car le maillage

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.3 Fréquences de résonance pour différentes géométries

---

est alors trop grossier, les fréquences de résonance du système se confondent alors avec les fréquences propres irrégulières de la boîte. Mais les dimensions étant importantes, le nombre d'éléments est déjà très élevé pour une telle configuration (environ 10500 éléments), ce qui nous limite pour des raisons de temps de calcul (environ 20 min pour chaque itération de la méthode de Newton avec 16 processeurs).

#### 2.3.2 Etude de l'influence de la forme du pavillon de Bessel sur le rayonnement

Nous allons ici nous intéresser à l'influence du paramètre de forme  $\nu$  des pavillons de Bessel sur les fréquences de résonance du système *tube+pavillon*.

Nous pouvons voir sur la figure 2.10 les différents profils de pavillons de Bessel que nous avons maillés avec des éléments de tailles T2B8. Les profils ont été calculés pour avoir un rapport  $r_{final}/r_{initial}$  constant. Comme nous l'avons dit précédemment, lorsque le paramètre de forme se rapproche ou dépasse l'unité, nous observons un évasement plus lent. Sur les figures 2.11 (pour la première fréquence de résonance  $f_{00,r}^0$ ) et 2.12 (pour la deuxième fréquence de résonance  $f_{00,r}^1$ ), nous nous apercevons que le facteur de pertes est proportionnel à la racine carré du facteur de forme et que nous obtenons un rayonnement maximal à partir de  $\nu = 2$ .

Précisons ici que dans un instrument de musique à vent, il doit y avoir un compromis entre la partie de la pression rayonnée et la partie réfléchi qui entretient l'auto-oscillation (des lèvres du musicien ou de l'anche), sinon l'instrument devient injouable [30]. Par contre, un pavillon entraînant un rayonnement maximal peut être très pratique comme pavillons d'enceintes, où leur rôle est notamment d'augmenter au maximum le rayonnement acoustique du haut-parleur.

Sur la figure 2.13 nous observons que le rapport entre les deux premières résonances est proportionnel à l'inverse de la racine carré du facteur de forme  $\nu$ . Nous avons alors le sentiment que le rapport entre les fréquences de résonance est d'autant plus dans un rapport d'harmonique pair que le paramètre de forme  $\nu$  augmente (jusqu'à une valeur limite). Mais cela reste à vérifier pour d'autres fréquences de résonance.

Un autre paramètre important dans la forme du pavillon est le rapport  $r_{final}/r_{initial}$ . Sur la figure 2.14 nous avons tracé différents profils de pavillon de Bessel avec un facteur de forme constant ( $\nu = 0,5$ ) pour différents rapports  $r_{final}/r_{initial}$ . Nous avons cherché les premières fréquences de résonance du système *tube+pavillon* pour ces différentes configurations (avec un maillage T2B8) et nous nous sommes aperçu, comme nous pouvons le voir sur la figure 2.15, que les pertes par rayonnement sont proportionnelles à la racine carré du rapport  $r_{final}/r_{initial}$  et atteignent un maximum à partir de  $r_{final}/r_{initial} = 3$ .

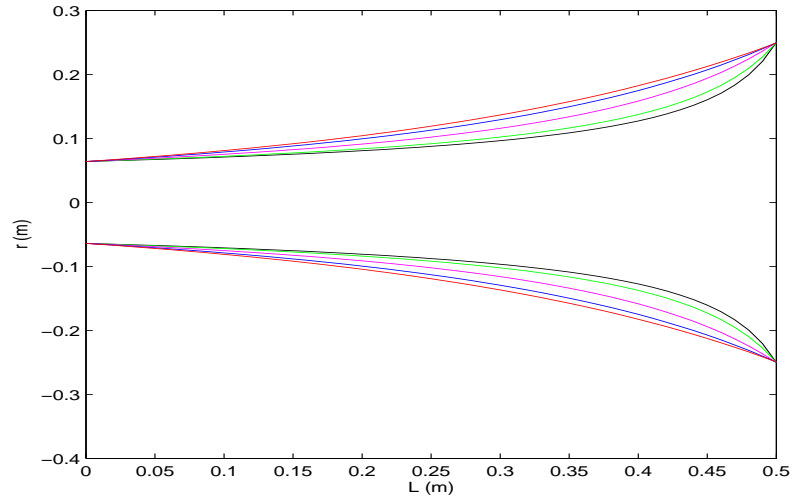


Figure 2.10 – Profil de différents pavillons de Bessel avec un rapport  $r_{final}/r_{initial} = 3,9$  pour différents paramètres de forme  $\nu$  (du centre vers les extrémités :  $\nu = 0,35$ ,  $\nu = 0,5$ ,  $\nu = 1$ ,  $\nu = 2$  et  $\nu = 4$ ).

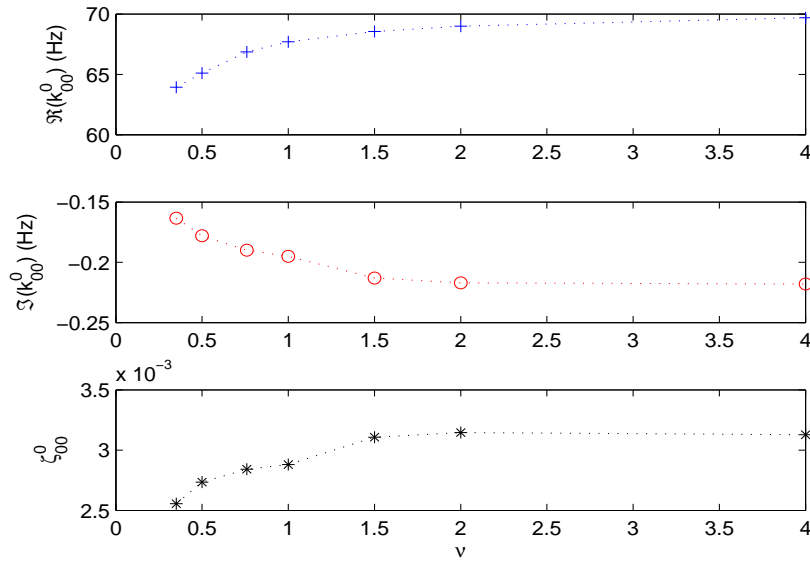


Figure 2.11 – Partie réelle, partie imaginaire et facteur de pertes ( $\zeta(f_{00,r}^0) = |\Im(f_{00,r}^0)|/\Re(f_{00,r}^0)$ ) du système *tube+pavillon* pour un tube de  $1m$  et un pavillon de Bessel de  $0,5m$  avec un rapport  $r_{final}/r_{initial} = 3,9$  pour différents paramètres de forme  $\nu$ .

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.3 Fréquences de résonance pour différentes géométries

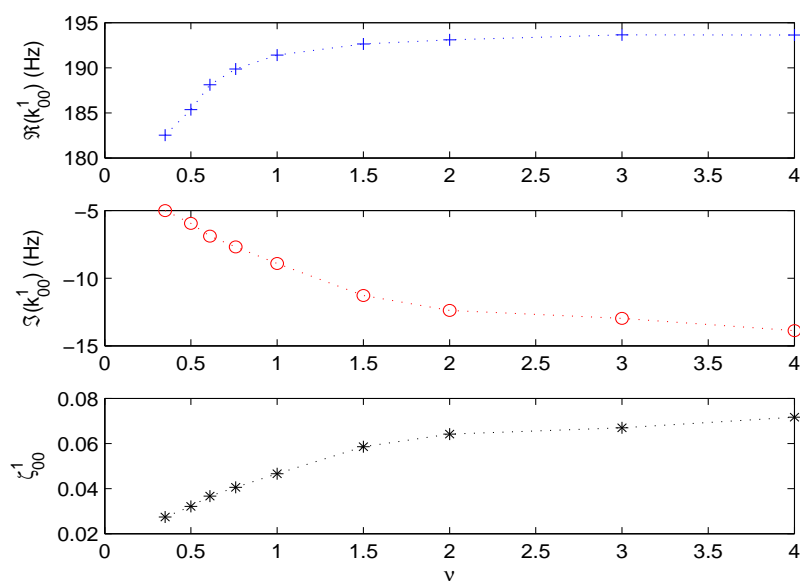


Figure 2.12 – Partie réelle, partie imaginaire et facteur de pertes ( $\zeta(f_{00,r}^1) = |\Im(f_{00,r}^1)|/\Re(f_{00,r}^1)$ ) du système *tube+pavillon* pour un tube de  $1m$  et un pavillon de Bessel de  $0,5m$  avec un rapport  $r_{final}/r_{initial} = 3,9$  pour différents paramètres de forme  $\nu$ .

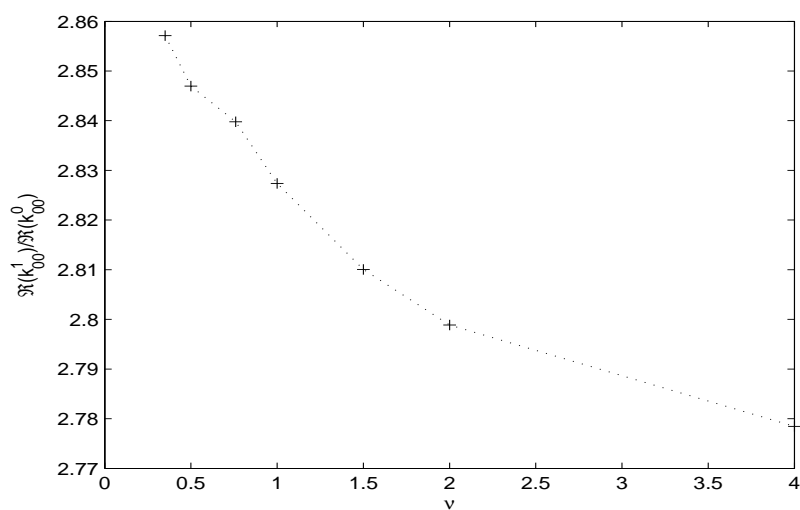


Figure 2.13 – Rapport des 2 premières résonances du système *tube+pavillon* pour un tube de  $1m$  et un pavillon de Bessel de  $0,5m$  avec un rapport  $r_{final}/r_{initial} = 3,9$  pour différents facteurs de forme  $\nu$ .

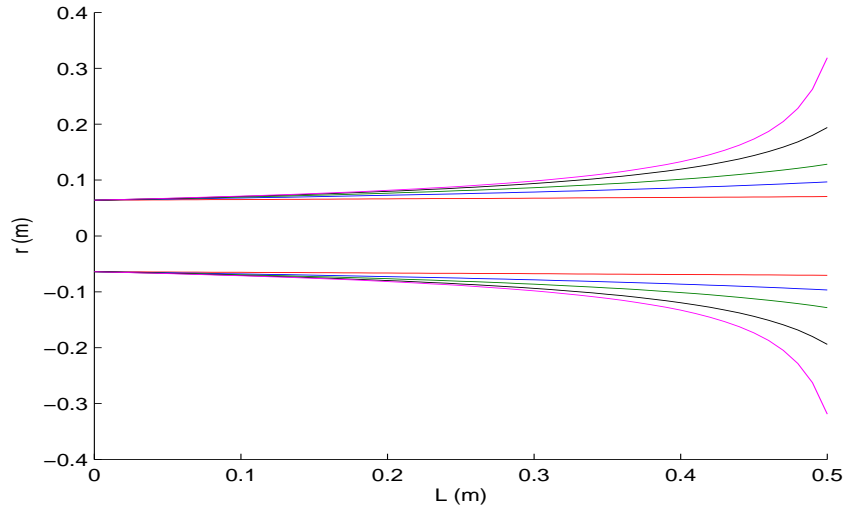


Figure 2.14 – Profil de différents pavillons de Bessel avec un paramètre de forme constant  $\nu = 0,5$  pour différents rapports  $r_{final}/r_{initial}$ .

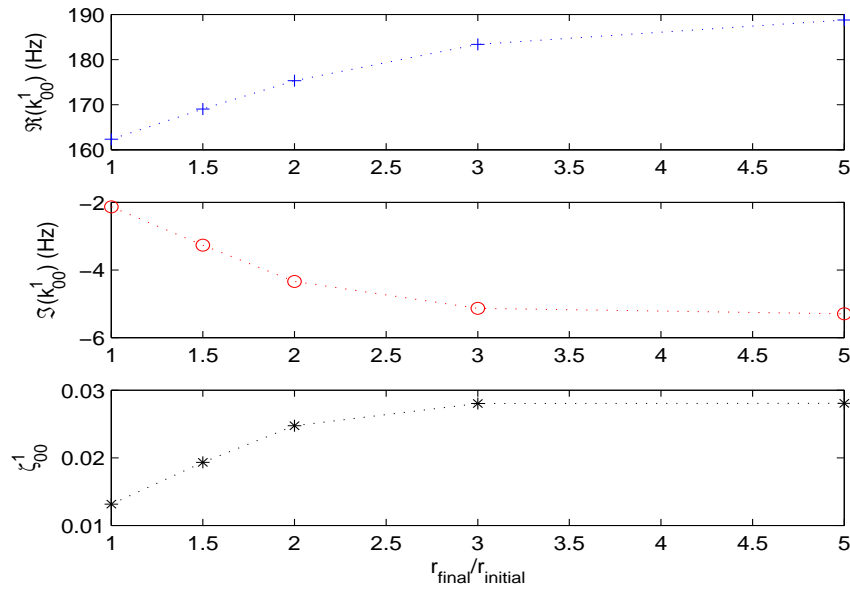


Figure 2.15 – Partie réelle, partie imaginaire et facteur de pertes ( $\zeta(f_{00,r}^1) = |\Im(f_{00,r}^1)|/\Re(f_{00,r}^1)$ ) du système *tube+pavillon* pour un tube de  $1m$  et un pavillon de Bessel de  $0,5m$  avec un paramètre de forme constant  $\nu = 0,5$  pour différents rapports  $r_{final}/r_{initial}$ .

#### 2.3.3 Cas du pavillon conique

Nous présentons ici rapidement l'influence d'un pavillon conique dont les rayons d'entrée et de sortie sont les mêmes que pour le pavillon de Bessel étudié précédemment ( $r_{initial} = 0,064m$  et  $r_{final} = 0,25m$ , ce qui nous donne  $R(x) = 0,372x + 0.064$ ). Les fréquences de résonance complexes du système *cylindre+pavillon* sont tracées sur la figure 2.16 pour les deux formes de pavillon. Nous observons à l'aide du facteur de pertes, que l'ajout d'un pavillon conique favorise le rayonnement seulement aux basses fréquences par rapport au pavillon de Bessel. Notons également à l'aide de la table 2.6 que l'ajout d'un pavillon conique ne fait pas tendre les résonances dans un rapport harmonique pair comme c'est le cas avec le pavillon de Bessel. C'est sûrement une des raisons pour lesquelles ce type de pavillon n'est pas utilisé (à ma connaissance) pour la facture instrumentale.

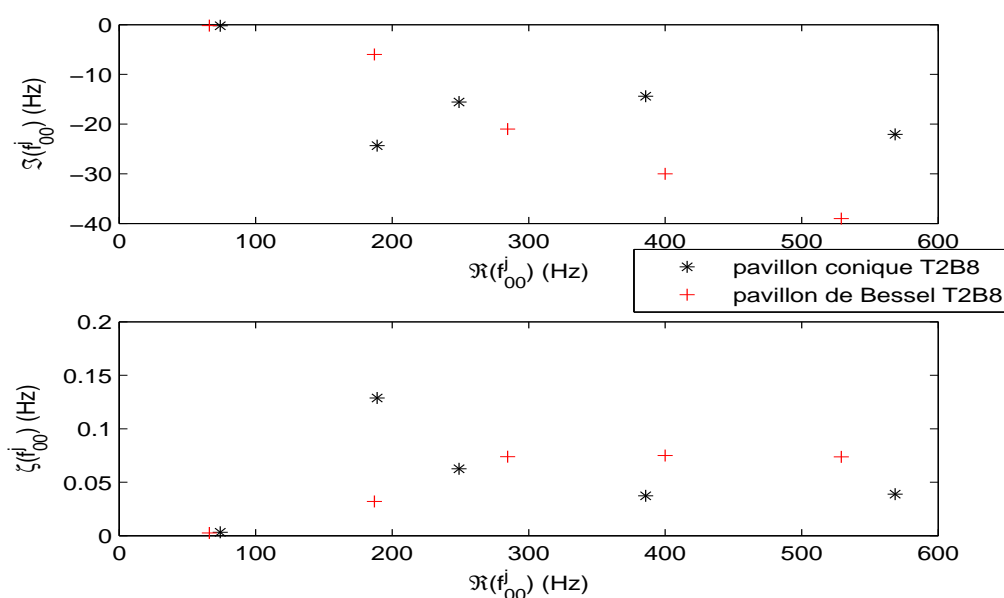


Figure 2.16 – Fréquences de résonance (figure du haut) et facteur de pertes (figure du bas), dans le cas d'un tuyau de  $1m$  avec un pavillon conique de  $0,5m$  (\*) et dans le cas d'un pavillon de Bessel de  $0,5m$  (+) (maillage T2B8).

Les premiers résultats obtenus ici dans le cas des pavillons est un premier exemple de l'application de notre code. Ce dernier peut nous permettre d'obtenir les résonances complexes de nombreux systèmes rayonnant. L'application au cas des pavillons nous a permis de retrouver quelques résultats connus dans la littérature afin de vérifier le bon comportement de notre modèle pour de telles géométries. Cela nous a aussi permis de nous rendre compte que le temps de calcul devenait vite important avec la taille du système. Nous proposons dans la partie suivante une méthode hybride entre la théorie modale analytique



j	$\Re(f_{00,r}^j/f_{00,r}^0)$ avec pavillon conique
0	74/74=1
1	189.03/74=2,55
2	248.92/74=3.36
3	385.63/74=5.21
4	568.39/74=7.68

Table 2.6 – Rapport entre les différentes fréquences et la première résonance dans le cas d'un tuyau de 1m avec un pavillon conique de 0,5m.

et la méthode d'éléments finis de frontière dans le but d'alléger le coût des calculs.

## 2.4 Méthode hybride entre la théorie modale et les éléments finis de frontière

La méthode d'éléments finis décrite précédemment entraîne un temps de calcul très important, notamment lorsque nous travaillons avec des résonateurs ayant des dimensions importantes. Dans cette partie nous présentons une méthode hybride entre la méthode BEM décrite précédemment et la méthode modale dans le but de limiter le temps de calcul. Pour cela, nous avons choisi de décrire une partie du résonateur qui a une géométrie complexe (par exemple le pavillon d'un instrument à vent) avec la méthode BEM et une autre partie purement cylindrique (ou plus globalement une portion du résonateur dont la géométrie est suffisamment simple pour être étudiée analytiquement) décrite à l'aide de la méthode modale développée dans le premier chapitre. Plus généralement, nous allons décrire la partie conservative de notre système à l'aide de la théorie modale analytique et la partie rayonnante à l'aide de la méthode numérique basée sur les éléments finis de frontière. Pour cela, nous avons dû adapter le code utilisé pour la méthode précédente afin d'obtenir la relation entre la pression et la vitesse à l'entrée du pavillon. En effet, dans la partie précédente nous avons calculé les zéros du déterminant de la matrice  $M_1$  afin de trouver les résonances, en imposant une condition de Neumann sur les parois de notre système. Mais afin d'obtenir l'impédance à l'entrée de la partie numérique (qui va nous permettre de faire le lien entre les 2 parties) nous devons avoir une vitesse non nulle sur la surface où nous souhaitons la calculer. Nous devons donc dans un premier temps rajouter dans notre programme le calcul de la vitesse sur cette surface. Le principe de cette méthode est représenté sur le schéma 2.17, où nous pouvons voir la partie décrite par la méthode BEM en pointillé d'où nous tirons l'impédance  $Z_{BEM}$  à l'entrée d'un pavillon (correspondant à la fin du conduit cylindrique), ainsi que la partie cylindrique où nous utilisons la théorie modale décrite aux chapitres précédents. Au final, cela revient à remplacer l'impédance de rayonnement utilisée dans la méthode d'impédance ramenée par l'impédance  $Z_{BEM}$ . Les différentes étapes de calculs nécessaires pour obtenir cette nouvelle formulation sont détaillées dans cette partie.

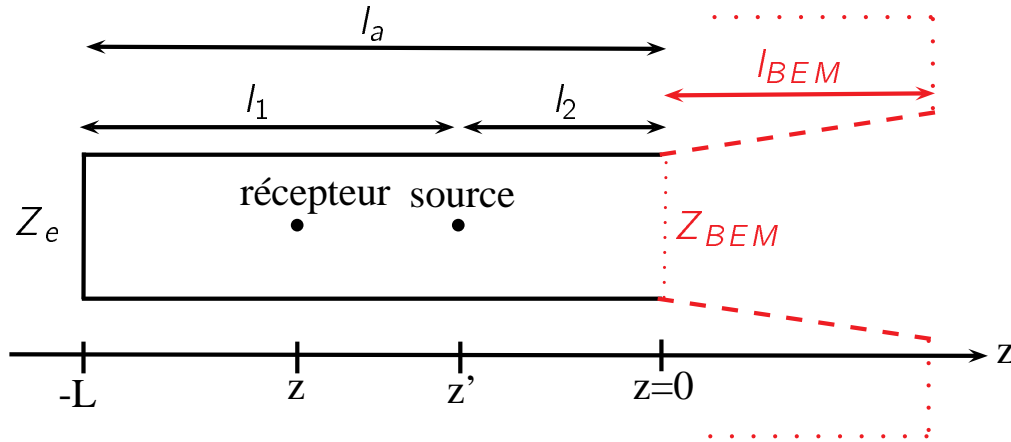


Figure 2.17 – Schéma du système *tube+pavillon* avec la partie cylindrique décrite par une méthode modale (trait plein) et avec la partie à géométrie variable décrite par la méthode BEM (pointillés).

### 2.4.1 Système d'équations utilisé

Repartons ici de la formulation générale donnée précédemment et plus précisément de la relation 2.10 sans source :

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{p} = \mathbf{M}_2 \mathbf{T},$$

avec la matrice  $\mathbf{M}_1$  de taille  $(N_e * N_e)$  constituée des éléments

$$M_{1,ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} - \int_{S_j} \left( \frac{\partial G(Q_i, Q')}{\partial n} \right)_{Q'} d\Sigma_{Q'},$$

et la matrice  $\mathbf{M}_2$  de taille  $(N_e * N_e)$  constituée des éléments

$$M_{2,ij} = \int_{S_j} G(Q_i, Q') d\Sigma_{Q'}.$$

Comme nous souhaitons connaître l'impédance, soit la relation entre la pression et la vitesse, sur la surface d'entrée du pavillon, nous n'appliquons plus une condition de Neumann sur celle-ci. Nous devons donc calculer la valeur de  $\mathbf{M}_2 \mathbf{T}$  sur les  $N_{se}$  éléments de la surface  $S_e$  considérée, qui s'écrit :

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{T} = \sum_{j=1}^{N_{se}} T_j \int_{S_j} G(Q_i, Q') dS_{Q'}. \quad (2.15)$$

Nous avons ainsi la relation matricielle suivante entre la pression et sa dérivée normale :

$$\mathbf{p} = \mathbf{Z}_{N_1} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{n}}, \quad (2.16)$$

où

$$\mathbf{Z}_{N_1} = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_2. \quad (2.17)$$

Comme précédemment, l'inversion de la matrice  $\mathbf{M}_1$  se fait dans notre code Fortran à l'aide d'une décomposition LU parallélisée. Enfin, à l'aide de l'équation d'Euler, nous pouvons écrire une relation entre la pression et la vitesse sur la surface d'entrée de notre système :

$$\mathbf{p} = ik\rho c \mathbf{Z}_{N_1} \mathbf{v}. \quad (2.18)$$

Il nous reste maintenant à faire le lien entre cette relation à l'entrée du pavillon et la description modale du tuyau. Pour cela, nous projetons cette impédance sur les modes propres du conduit cylindrique.

### 2.4.2 Projection sur les modes propres du tuyau

Nous allons maintenant travailler en analogie avec la méthode utilisée par Zorumski [8] qui projette la pression externe sur les modes propres du conduit afin d'obtenir l'impédance de rayonnement (comme nous avons pu le voir dans le premier chapitre). Nous allons utiliser la même technique en remplaçant la pression externe dans un milieu infini par la pression obtenue sur la surface d'entrée de notre pavillon obtenue avec la méthode BEM. Dans les calculs suivant nous notons  $p^-$  la pression obtenue avec la méthode modale et  $p^+$  celle obtenue par la méthode BEM donnée par la relation (2.18). Nous faisons de même pour la vitesse ( $v^-$  et  $v^+$ ).

Commençons par utiliser l'expression de la pression en fonction des modes propres du conduit. Nous la définissons ici de la manière suivante :

$$p^-(r, \theta) = \rho c^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu} \Phi_{\nu}(r, \theta),$$

avec  $\nu$  correspondant au couple d'indices  $(m, n)$ .

Nous tronquons la série à un nombre  $N$  de modes  $(m, n)$ . Nous avons ainsi  $N = M_m \times N_n$  où  $M_m$  est le nombre d'incides azimuthaux et  $N_n$  le nombre d'incides radiaux. La pression se note alors :

$$\tilde{p}^-(r, \theta) = \rho c^2 \sum_{\nu=0}^N P_{\nu} \Phi_{\nu}(r, \theta),$$

où  $p^-(r, \theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{p}^-(r, \theta)$ .

Pour les  $N_e$  points  $Q_i$  de coordonnées  $(r_i, \theta_i)$ , nous avons :

$$\tilde{p}^-(Q_i) = \rho c^2 \sum_{\nu=0}^N \Phi_{\nu}(Q_i) P_{\nu}.$$

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.4 Méthode hybride entre la théorie modale et les éléments finis de frontière

Nous supposons que cette fonction est constante sur l'élément  $i$ . En prenant  $Q_i$  comme étant le centre de l'élément  $i$ , nous notons :

$$\tilde{p}^-(Q_i) \simeq \hat{p}_i^-.$$

Nous suivons la même méthode pour obtenir la vitesse en fonction des modes propres du conduit et nous obtenons :

$$\tilde{v}^-(Q_i) = c \sum_{\nu=0}^N \Phi_{\nu}(Q_i) V_{\nu} \simeq \hat{v}_i^-.$$

Notons les résultats précédents de manière matricielle :

$$\hat{\mathbf{p}}^- \simeq \rho c^2 \mathbf{\Phi}_{\nu} \mathbf{P}_{\nu}, \quad (2.19)$$

et

$$\hat{\mathbf{v}}^- \simeq c \mathbf{\Phi}_{\nu} \mathbf{V}_{\nu}. \quad (2.20)$$

Avec :

- $\hat{\mathbf{p}}^-$  et  $\hat{\mathbf{v}}^-$  les vecteurs colonnes de taille  $N_e$  constitués respectivement des éléments  $\hat{p}_i^-$  et  $\hat{v}_i^-$ .
- $\mathbf{P}_{\nu}$  et  $\mathbf{V}_{\nu}$  les vecteurs colonnes de taille  $N$  constitués des éléments  $P_{\nu}$  et  $V_{\nu}$ .
- $\mathbf{\Phi}_{\nu}$  la matrice de taille  $(N_e \times N)$  constituée des éléments  $\Phi_{\nu}(Q_i)$ .

Avec les notations précédentes, la relation (2.18) donnant la pression obtenue par la méthode BEM se note :

$$\hat{\mathbf{p}}^+ = ik\rho c \mathbf{Z}_{N_1} \hat{\mathbf{v}}^+. \quad (2.21)$$

Par continuité de la vitesse acoustique en tout point de collocation, on a  $\hat{v}_i^- = \hat{v}_i^+$ . Nous obtenons ainsi avec les relations (2.20) et (2.21) :

$$\hat{\mathbf{p}}^+ = ik\rho c^2 \mathbf{Z}_{N_1} \mathbf{\Phi}_{\nu} \mathbf{V}_{\nu}. \quad (2.22)$$

Du fait du maillage BEM non adapté, la projection des modes  $\Phi_{\nu}$  sur la surface de raccord conduit à une normalisation approchée, définie telle que :

$$\mathbf{\Phi}_{\nu}^T \mathbf{S} \mathbf{\Phi}_{\nu} \simeq S_e \mathbf{I}, \quad (2.23)$$

avec  $\mathbf{S}$  la matrice diagonale de taille  $(N_e \times N_e)$  constitué des surfaces  $S_i$  de chaque élément  $i$  de la surface de raccord  $S_e$  et  $\mathbf{I}$  la matrice identité de taille  $(N \times N)$ .

Comme précédemment pour la vitesse, la continuité de la pression acoustique en tout point de collocation conduit à  $\hat{p}_i^+ = \hat{p}_i^-$ . Les relations (2.19) et (2.22) décrivent alors la

même grandeur. Ainsi, en multipliant ces deux relations par  $\Phi_{\nu'}^T \mathbf{S}$ , en les égalisant et en utilisant la condition de normalisation (2.23) nous obtenons :

$$ik \Phi_{\nu'}^T \mathbf{S} \mathbf{Z}_{N_1} \Phi_{\nu} \mathbf{V}_{\nu'} = S_e \mathbf{P}_{\nu}, \quad (2.24)$$

avec  $\nu'$  désignant d'autres indices de modes que  $\nu$ .

Nous définissons la matrice impédance  $\mathbf{Z}_{BEM}$  de taille  $(N \times N)$  de la manière suivante :  $\mathbf{P}_{\nu} = \mathbf{Z}_{BEM} \mathbf{V}_{\nu'}$ . Ainsi d'après la relation (2.24) nous obtenons :

$$\mathbf{Z}_{BEM} = ik S_e^{-1} \Phi_{\nu'}^T \mathbf{S} \mathbf{Z}_{N_1} \Phi_{\nu}. \quad (2.25)$$

Maintenant, il ne nous reste plus qu'à remplacer l'impédance de rayonnement  $\mathbf{Z}_{ray}$  utilisée dans la méthode d'impédance ramenée par l'impédance  $\mathbf{Z}_{BEM}$  décrite par la relation (2.25) afin d'obtenir la fonction de Green  $\Gamma$  d'un système dont une partie est décrite par un cylindre de longueur finie utilisant une méthode modale et une partie de géométrie variable décrite par une méthode BEM (comme décrit sur la figure 2.17). La recherche des fréquences de résonances se fait ici par l'intermédiaire de la méthode de Newton non plus sur les zéros du déterminant mais sur les pôles de la fonction de Green alors obtenue comme dans le cas de la théorie modale. Dans un premier temps, nous projetons notre impédance seulement sur le mode plan du tuyau car nous travaillons suffisamment loin de la fréquence d'apparition du premier mode non plan.

### 2.4.3 Impédances à l'entrée d'un cylindre obtenues avec la méthode hybride

Commençons ici par comparer l'impédance  $\mathbf{Z}_{BEM}$ , calculée avec la méthode hybride à l'entrée d'un cylindre de longueur  $L_{BEM}$ , avec  $\mathbf{Z}^+$  qui correspond à l'impédance de rayonnement multimodale avec écran infini ramenée à l'entrée d'un cylindre de même longueur que le cylindre BEM. Rappelons la formule 1.16, utilisée pour ramener l'impédance de rayonnement au point souhaité :

$$\mathbf{Z}^+(z') = -\mathbf{Z}_c \mathbf{S}_b^{-1} \mathbf{C}_b + \mathbf{Z}_c \mathbf{S}_b^{-1} [\mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_{ray} - \mathbf{S}_b^{-1} \mathbf{C}_b]^{-1} \mathbf{S}_b^{-1},$$

avec  $\mathbf{C}_b$  la matrice diagonale constituée des  $\cosh(ik_{mn}L_{BEM})$  et  $\mathbf{S}_b$  la matrice diagonale constituée des  $\sinh(ik_{mn}L_{BEM})$ .

#### Avec une boîte parallélépipédique

Nous observons la comparaison entre ces deux impédances, notées ici  $Z_e$ , pour un cylindre de longueur  $L_{BEM} = 10cm$  et de rayon  $b = 0,064m$  sur les figures 2.18 et 2.19 pour deux boîtes de taille CEI/3 mais de profondeurs  $l_z$  différentes (maillage T2B10). Précisons que pour des raisons de temps de calcul, nous représentons ici seulement les impédances pour des fréquences réelles, ceci nous permet quand même d'avoir un premier test de notre méthode.

Nous observons sur la figure 2.18 l'impédance obtenue avec la méthode BEM à l'entrée

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.4 Méthode hybride entre la théorie modale et les éléments finis de frontière

d'un cylindre de 10cm pour une boîte de profondeur  $l_z = 55cm$ . Nous remarquons que, comme dans la méthode entièrement décrite par les éléments finis, les fréquences propres irrégulières du problème interne sont présentes. Ces fréquences irrégulières peuvent être approchées par la formule classique des fréquences propres d'une boîte avec une condition de Dirichlet sur les parois :

$$f_{wxy} = \frac{V + dV}{V} \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{w}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{x}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{y}{l_z}\right)^2},$$

avec  $V = l_x \times l_y \times l_z$  le volume de la boîte et  $dV = \pi * b^2 * L$  nous permet de tenir compte du volume du cylindre de longueur  $L$  et de rayon  $b$ .

Ainsi, pour une boîte CEI/3 et  $l_z = 55cm$ ,  $L = 10cm$  et  $b = 6,4cm$ , nous avons les premières résonances de la boîte à 583Hz, 795Hz, 881Hz et 961Hz pour  $c = 340m/s$ . Les fréquences propres irrégulières observées sur la figure 2.18 correspondent bien à ces valeurs.

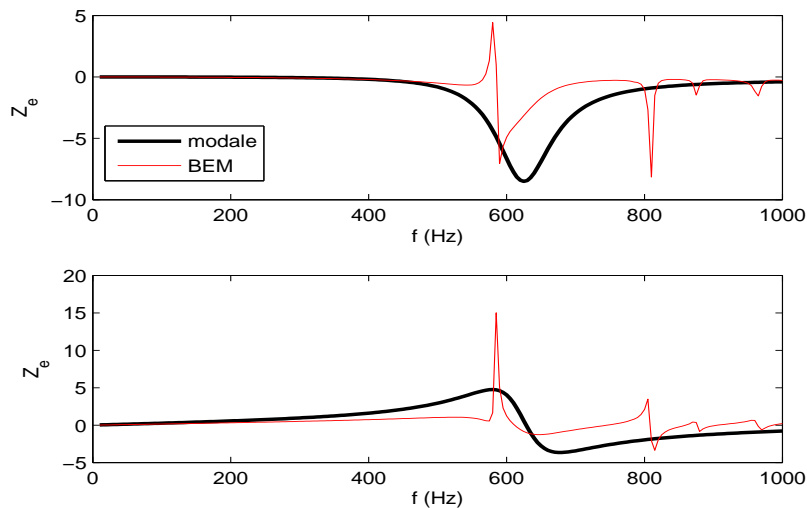


Figure 2.18 – Comparaison entre  $Z_e$  calculée avec la méthode BEM ( $L_{BEM} = 10cm$  et  $l_z = 55cm$ ) pour un maillage T2B10 et celle calculée avec l'impédance de rayonnement analytique ( $b = 0,064m$ ).

Il est alors évident que plus le volume de la boîte est faible, plus ces fréquences apparaissent à des fréquences élevées. Par exemple, pour  $l_z = 15cm$ , la première fréquence irrégulière se trouve vers 1277Hz. Ainsi, celles-ci n'apparaissent pas dans la gamme fréquentielle représentée sur la figure 2.19 où  $l_z = 15cm$ . Nous observons cependant un décalage en amplitude entre les deux méthodes, qui pourrait s'expliquer par le fait que l'écran de taille CEI/3 utilisé est trop petit pour bien décrire l'écran infini utilisé dans la méthode modale.

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.4 Méthode hybride entre la théorie modale et les éléments finis de frontière

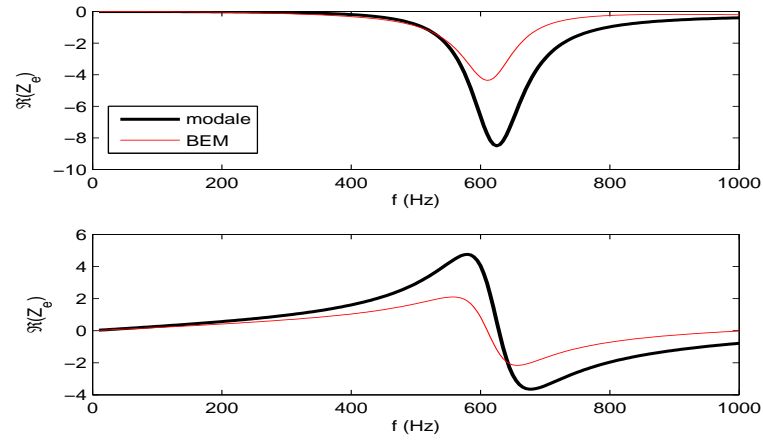


Figure 2.19 – Comparaison entre  $Z_e$  calculée avec la méthode BEM ( $L_{BEM} = 10\text{cm}$  et  $l_z = 15\text{cm}$ ) pour un maillage T2B10 et celle calculée avec l'impédance de rayonnement analytique ( $b = 0,064\text{m}$ ).

Sur la figure 2.20 nous observons la comparaison entre les impédances d'entrée obtenues par les deux méthodes pour un cylindre de longueur  $L_{BEM} = 49\text{cm}$ . Nous constatons que les valeurs des pics obtenues par les deux méthodes sont en bon accord jusqu'à environ 500Hz malgré le maillage grossier utilisé (T2B10), par contre il y a encore un décalage en amplitude assez important.

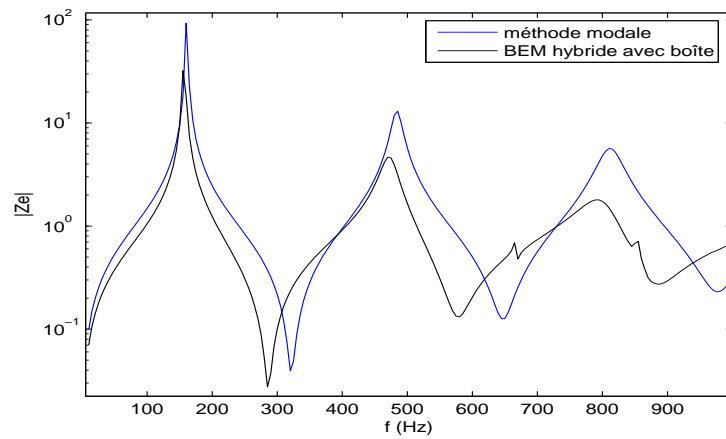


Figure 2.20 – Comparaison entre  $Z_e$  calculée avec la méthode BEM ( $L_{BEM} = 49\text{cm}$  et  $l_z = 55\text{cm}$ ) pour un maillage T2B10 et celle calculée avec l'impédance de rayonnement analytique ( $b = 0,064\text{m}$ ).

### Avec un profil externe suivant le profil interne

Afin d'essayer de nous affranchir des fréquences propres irrégulières (dans la gamme de fréquences qui nous intéresse), nous avons réussi à modifier notre programme de maillage, afin de remplacer la boîte parallélépipédique par un profil externe qui suit le profil interne du résonateur. Ainsi, le volume intérieur (entre le profil interne et le profil externe) est beaucoup plus faible que dans le cas de la boîte et de ce fait les fréquences propres irrégulières apparaissent à des fréquences beaucoup plus élevées. Nous pouvons voir la comparaison des impédances obtenues dans les différentes configurations (avec et sans boîte) sur la figure 2.21. Force est de constater, que lorsque le profil externe ( $L_{ext} = 0,51cm$  et  $b_{ext} = 0,084cm$ ) suit le profil interne ( $L_{int} = 0,49cm$  et  $b_{ext} = 0,064cm$ ), les résultats sont en bien meilleurs accords avec la théorie modale que lorsque nous utilisons une boîte pour fermer le maillage. De plus, le fait de ne plus mailler une boîte de grandes dimensions nous permet dans certains cas de réduire le nombre d'éléments et ainsi de réduire le temps de calcul.

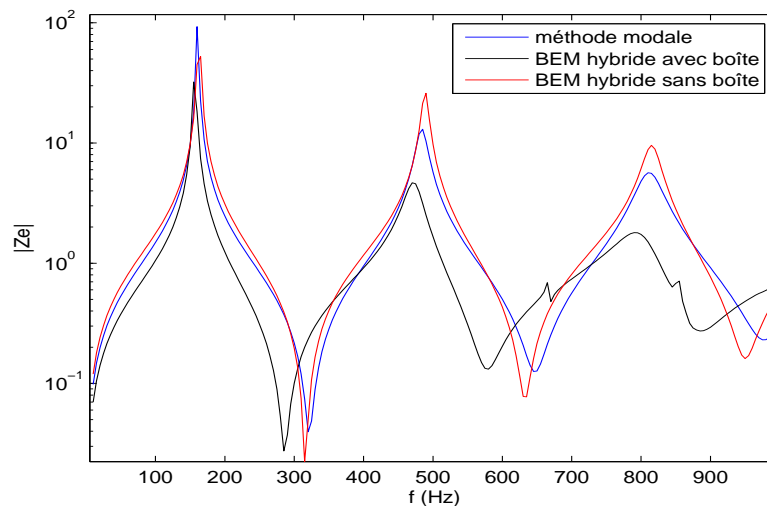


Figure 2.21 – Comparaison entre  $Z_e$  calculée avec la méthode BEM ( $L_{BEM} = 49cm$  et  $l_z = 55cm$ ) avec et sans boîte pour un maillage T2B10 et celle calculée avec l'impédance de rayonnement analytique ( $b = 0,064m$ ).

Sur la figure 2.22, nous pouvons voir l'apparition du mode 01 sur l'impédance d'entrée calculée avec la méthode modale et avec la méthode hybride pour un maillage dont le profil extérieur suit le profil intérieur. Les deux méthodes donnent des résultats très proches (moins de 1% de différence pour la valeur des pics de résonances). Il est intéressant de noter ici, que ce résultat ne peut être obtenu avec la présence de la boîte car les fréquences propres irrégulières ne pourraient alors pas être distinguées des fréquences de résonance qui nous intéressent.



Il est important de remarquer ici que l'effet d'écran est fortement diminué lorsque le profil externe suit le profil interne du résonateur par rapport au cas de la boîte CEI/3. Malgré cela, les résultats sont en bien meilleurs accords avec ceux obtenus par la théorie modale (écran infini). C'est un point qui mériterait d'être étudié plus précisément.

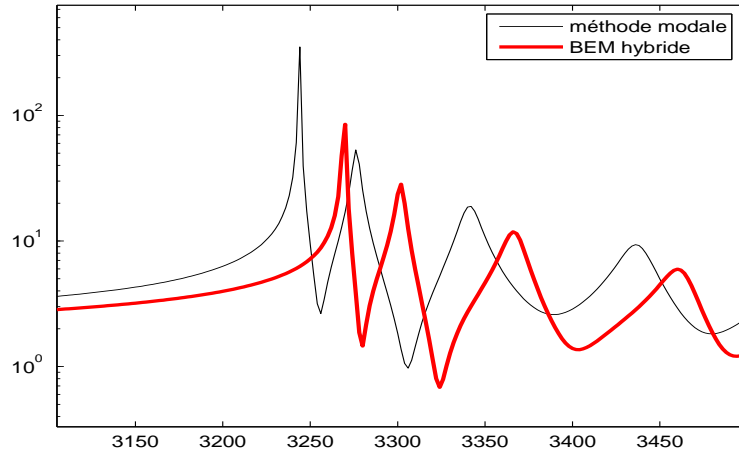


Figure 2.22 – Comparaison entre  $Z_e$  calculée avec la méthode BEM ( $L_{BEM} = 49\text{cm}$  et  $l_z = 55\text{cm}$ ) sans boîte pour un maillage T2B10 et celle calculée avec l'impédance de rayonnement analytique ( $b = 0,064\text{m}$ ).

Maintenant que nous avons pu valider l'impédance d'entrée  $Z_{BEM}$  obtenue avec la méthode hybride, nous allons nous intéresser, dans la prochaine partie, à la fonction de Green du système complet ainsi qu'à ses résonances complexes.

#### 2.4.4 Calcul des fréquences de résonance d'un cylindre à l'aide de $Z_{BEM}$

Nous allons maintenant utiliser l'impédance calculée avec la méthode BEM à l'entrée d'un cylindre de longueur  $L_{BEM} = 49\text{cm}$  tracée sur la figure 2.21 (dans le cas sans boîte), comme condition de sortie de cylindres de différentes longueurs décrits analytiquement. Nous pouvons voir les fonctions de Green obtenues dans ces différentes configurations pour des fréquences réelles sur les figures 2.23 et 2.24. Nous constatons comme précédemment, que les fréquences des pics et leurs amortissements obtenus par les deux méthodes sont en très bons accords pour les différentes longueurs du tuyau analytique (1cm sur la figure 2.23 et 1,01m sur la figure 2.24) dans la gamme de fréquences ici représentées. Seules quelques différences existent au niveau des amplitudes des pics. Cela peut s'expliquer par le fait que l'écran infini utilisé dans la méthode modale est très mal représenté dans le cas où le profil externe suit le profil interne (l'épaisseur entre le profil interne et le profil externe est seulement de 2cm). Une autre piste peut venir du fait que la section  $S_e$ , sur laquelle nous

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.4 Méthode hybride entre la théorie modale et les éléments finis de frontière

faisons la jonction entre la partie modale et BEM, est mailler grossièrement dans le cas ici présenté. Cela ne nous permet donc pas d'avoir une bonne description du rayonnement du système complet.

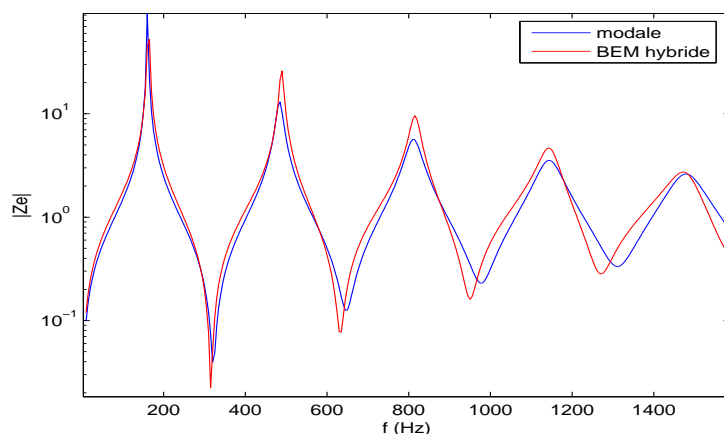


Figure 2.23 – Fonction de Green obtenue avec la condition de sortie tracée sur la figure 2.21 ( $L_{\text{BEM}} = 49\text{cm}$  sans boîte) et pour une longueur de cylindre analytique  $l_a = 1\text{cm}$  soit au total une longueur  $L = 50\text{cm}$  (avec  $b=0,064\text{m}$ ).

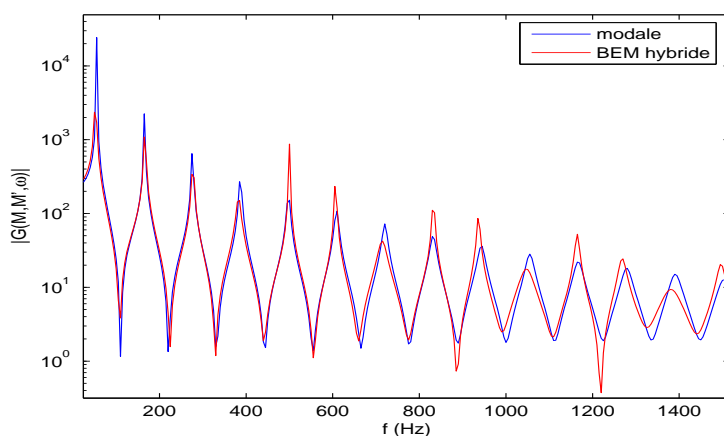


Figure 2.24 – Fonction de Green obtenue avec la condition de sortie tracée sur la figure 2.21 ( $L_{\text{BEM}} = 49\text{cm}$  sans boîte) et pour une longueur de cylindre analytique  $l_a = 1,01\text{m}$  soit au total une longueur  $L = 1,5\text{m}$  (avec  $b=0,064\text{m}$ ).

## Chapitre 2 : Résonateurs de différentes géométries avec un écran fini

### 2.4 Méthode hybride entre la théorie modale et les éléments finis de frontière

$j$	49cm BEM	1cm BEM	tout BEM	Modale 1 HM
0	159,18-0,68i	158,75-1,13i	156,98-0,53i	157,9-0,93i
1	478,88-8,72i	479,58-9,83i	474,06-7,31i	475,76-7,63i
2	805,84-22,35i	809,74-20,57i	796,8-18,7i	797,95-18,24i
3	1140,2-33,6i	1171,12-60,19i	1123,82-27,72i	1124,25-30,14i
nb d'éléments	2400	1882	2468	—
$t_i$ (s)	80	30	5	0,15

Table 2.7 – Fréquences de résonance du cylindre de longueur totale  $L = 50\text{cm}$  obtenues avec un cylindre BEM de longueur  $L_{\text{BEM}} = 1\text{cm}$  et  $z_b = 15\text{cm}$  (T1B5) puis  $L_{\text{BEM}} = 49\text{cm}$  et  $z_b = 55\text{cm}$  (T2B5) dans une boîte CEI/3, et celles obtenues avec la méthode modale (écran infini) et la méthode entièrement BEM (T2B5) avec  $b = 0,047\text{m}$  dans une boîte CEI/3.  $t_i$  est le temps d'itération par fréquence pour 16 processeurs.

Nous pouvons voir sur la table 2.7 les résonances d'un système de longueur totale  $L_{\text{tot}} = 50\text{cm}$  pour différentes longueurs de la portion décrite en BEM. Ceci nous permet de voir que les résultats sont en bon accords entre les différentes méthodes, si ce n'est à partir de 1000Hz lorsque nous décrivons seulement 1cm du cylindre par les éléments finis de frontière. Ceci est sûrement dû au maillage trop grossier sur le tube qui est de 1cm, ce qui correspond à longueur du cylindre décrite en BEM. De plus, pour un tronçon si court, le champ évanescant est alors mal décrit près du bord. Nous remarquons aussi que le temps de calcul de la méthode *hybride* est beaucoup plus long que pour la méthode entièrement BEM. Mais il est important de préciser que ce n'est pas le cas pour toutes les configurations. En effet, pour un cylindre de longueur  $L = 1\text{m}50$  avec un maillage T2B5, nous avons besoin de 6452 éléments pour décrire tout le système, ce qui entraîne un temps de calcul de 3min30 par fréquence avec 16 processeurs. Alors qu'avec la méthode hybride le temps de calcul reste le même lorsque nous rallongeons la partie analytique.

Un autre avantage de cette méthode réside dans le fait que nous pouvons calculer la fonction de Green d'un système de longueur  $L = l_a + L_{\text{BEM}}$  pour plusieurs longueur  $l_a$  de la partie analytique en utilisant l'impédance  $Z_{\text{BEM}}$  calculée une seule fois pour une longueur  $L_{\text{BEM}}$ , comme nous avons pu le voir sur les figures 2.23 et 2.24. Nous pouvons par exemple calculer l'impédance  $Z_{\text{BEM}}$  à l'entrée d'un pavillon puis l'utiliser comme condition de sortie de plusieurs résonateurs calculés analytiquement. Une fois que nous connaissons  $Z_{\text{BEM}}$ , le temps de calcul par la méthode d'impédance ramené est alors très rapide (0,15s par fréquence, rappelons que le code décrivant la partie impédance ramenée n'est pas parallélisé).

#### 2.4.5 Résonateurs avec pavillons

Maintenant que nous avons testé notre code pour le cas du tuyau cylindrique, nous pouvons alors étudier des résonateurs ayant des géométries plus complexes. Nous présentons ici quelques résultats concernant l'ajout de pavillons sur un cylindre. Nous calculons l'impédance à l'entrée du pavillon avec la méthode BEM puis nous utilisons la méthode d'impédance ramenée pour obtenir la fonction de Green du système *tube+pavillon*. Les résultats présentés ici se limitent au cas des fréquences réelles, mais cela nous permet d'avoir une première idée des possibilités de notre code. De plus, au vu de la gamme de fréquence étudiée, nous nous limitons ici à la projection de l'impédance BEM sur le mode plan du résonateur cylindrique.

##### Pavillon de Bessel

Dans un premier temps nous calculons l'impédance à l'entrée d'un pavillon de Bessel, de même dimensions que celui étudié précédemment avec la méthode entièrement BEM. Lorsque nous utilisons une boîte (ici de taille CEI) pour fermer le maillage du pavillon comme représenté sur la figure 2.25, l'impédance obtenue à l'entrée du pavillon est fortement marquée par les fréquences propres irrégulières comme nous pouvons le voir sur la figure 2.26. Mais lorsque nous nous affranchissons de cette boîte avec le profil externe qui suit le profil interne comme représenté sur la figure 2.27, les fréquences propres irrégulières n'apparaissent plus dans la gamme de fréquences qui nous intéresse comme nous l'observons sur la figure 2.28. Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec la méthode hybride et ceux obtenus avec la méthode entièrement BEM, nous avons réalisé un nouveau maillage du système *tube 1 m + pavillon 0,5m*, dont une coupe est représentée sur la figure 2.29. Nous supprimons ainsi l'effet d'écran dû à la présence de la boîte CEI. Les premières fréquences de résonance obtenues avec les deux méthodes sont comparées sur la figure 2.30. Nous constatons alors qu'elles sont en bon accord. Les différences observées, notamment au niveau des parties imaginaires, sont sûrement dues au maillage très grossier de la surface de raccord  $S_e$  utilisée dans la méthode hybride, ce dernier est représenté sur la figure 2.31 (le pavillon est maillé avec des éléments de 4cm). En effet, cette surface est primordiale pour le calcul des pertes par rayonnement car c'est sur cette dernière que nous faisons la projection des modes propres du résonateur décrit analytiquement, ce qui permet d'établir la jonction entre la partie passive et dissipative du système. Ainsi, un maillage trop grossier entraîne une réduction de la surface de raccord et donc une diminution des pertes.

Il est important de noter que le temps d'itération pour une fréquence est d'environ 20 min pour la méthode entièrement BEM (9000 éléments) et d'environ 1min30s pour la méthode hybride (2690 éléments) avec 16 processeurs. Ceci vient principalement du fait qu'avec la méthode entièrement BEM nous devons aussi mailler le cylindre de 1m, ce qui rajoute énormément d'éléments et donc du temps de calcul. C'est donc dans ce genre de configuration que l'utilisation de notre méthode hybride est judicieuse.

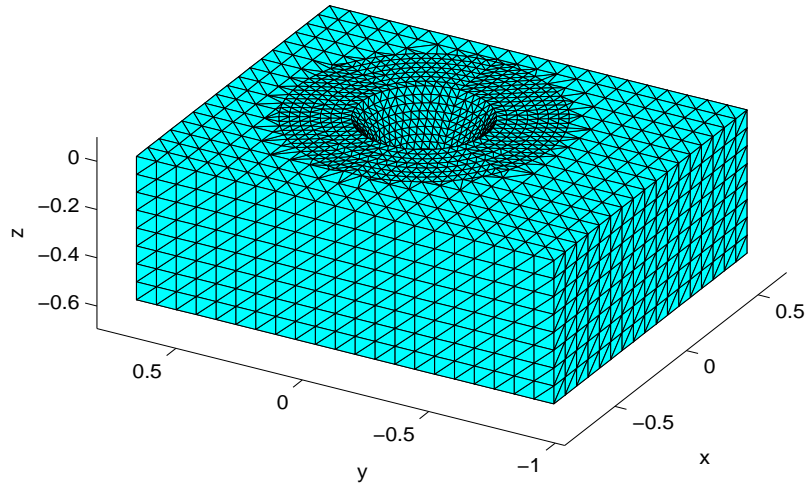


Figure 2.25 – Maillage du pavillon de Bessel, avec la présence d'une boîte CEI, utilisé dans la méthode hybride.

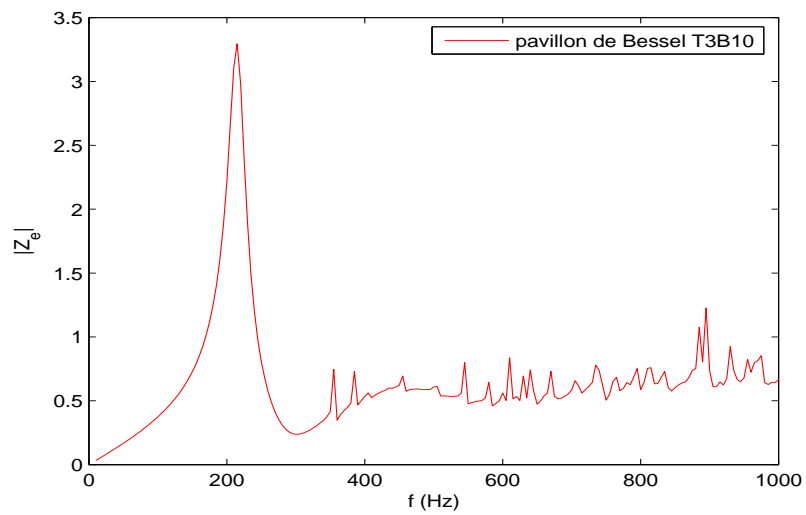


Figure 2.26 – Impédance obtenue à l'entrée du pavillon de Bessel décrit par le maillage représenté sur la figure 2.25.

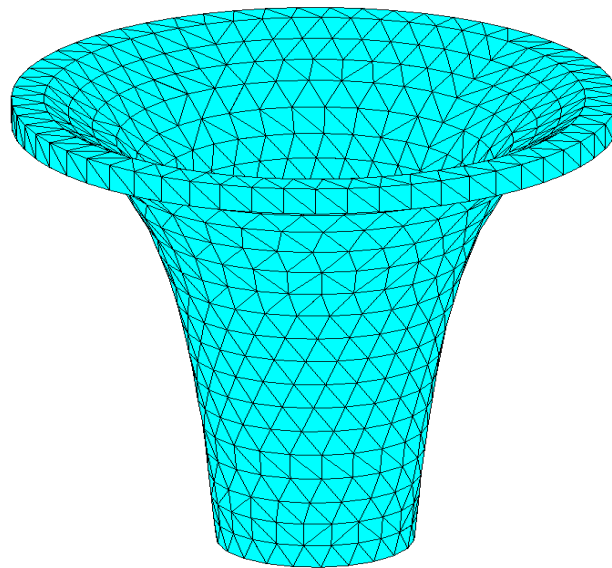


Figure 2.27 – Maillage du pavillon de Bessel, avec le profil externe qui suit le profil interne, utilisé dans la méthode hybride (éléments de 4cm).

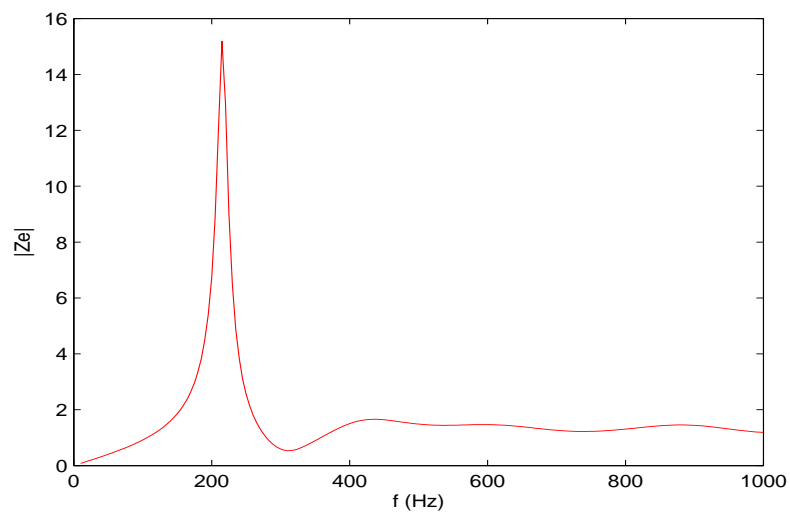


Figure 2.28 – Impédance obtenue à l'entrée du pavillon de Bessel décrit par le maillage représenté sur la figure 2.27.

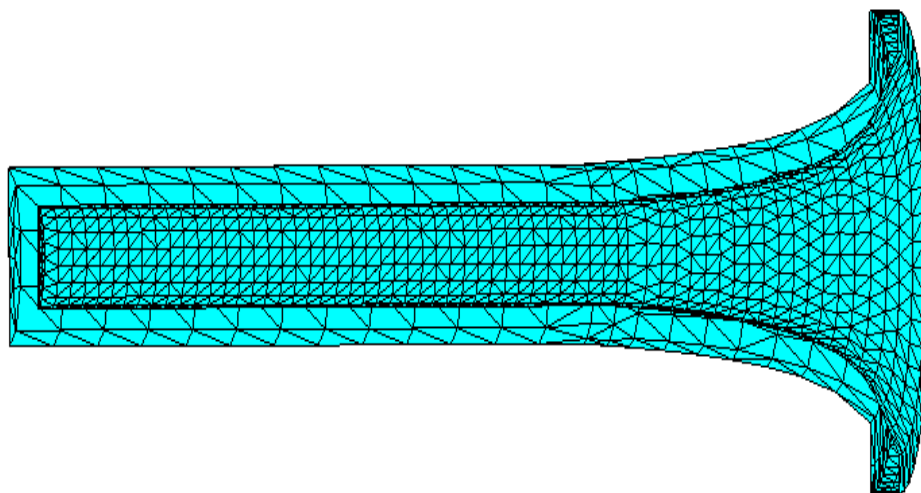


Figure 2.29 – Coupe de profil du maillage du pavillon de Bessel, avec le profil externe (éléments de 4cm) qui suit le profil interne (éléments de 2cm), utilisé dans la méthode entièrement BEM.

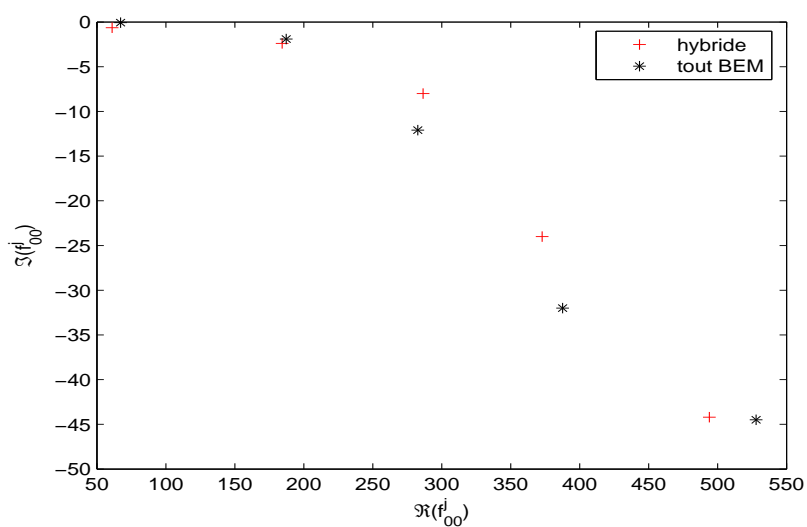


Figure 2.30 – Premières fréquences de résonances du mode plan obtenues avec la méthode entièrement BEM (\*) et avec la méthode hybride (+) dans le cas d'un système *tube + pavillon de Bessel*.

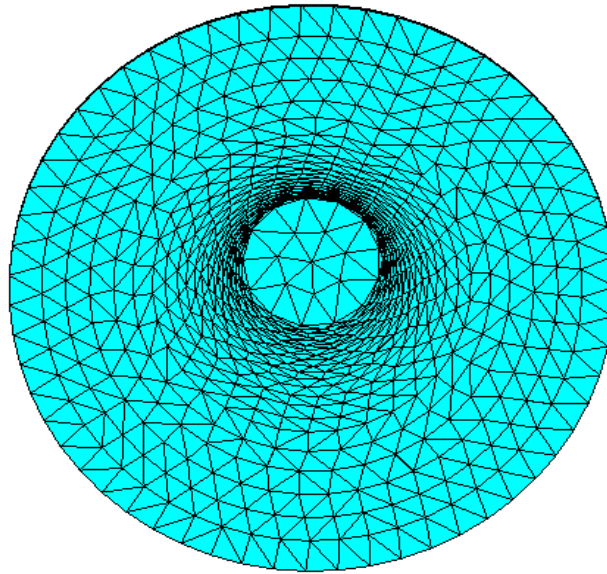


Figure 2.31 – Maillage de la surface de raccord  $S_e$  du pavillon de Bessel, avec le profil externe qui suit le profil interne, utilisé dans la méthode hybride.

#### Pavillon conique

Dans un second temps, nous nous intéressons au système *tube+pavillon conique* que nous avons décrit précédemment. Le maillage du pavillon utilisé pour la méthode hybride est représenté sur la figure 2.32 (2000 éléments de 4cm). Nous avons réalisé un nouveau maillage pour la méthode entièrement BEM qui, comme dans le cas du pavillon de Bessel, suit le profil interne du système *tube 1m + pavillon 0,5m*. Les fréquences de résonance obtenues avec les deux méthodes sont tracées sur la figure 2.33. Nous pouvons voir que comme dans le cas du pavillon de Bessel, les deux méthodes donnent des résultats très proches si ce n'est pour les parties imaginaires en hautes fréquences. Mais ceci est sûrement dû, comme précédemment, à un maillage trop grossier (éléments de 4cm) de la surface de raccord  $S_e$  entre la partie BEM et la partie décrite analytiquement. Dans cette configuration, nous avons de nouveau un temps d'itération plus de 10 fois plus rapide dans le cas de la méthode hybride.



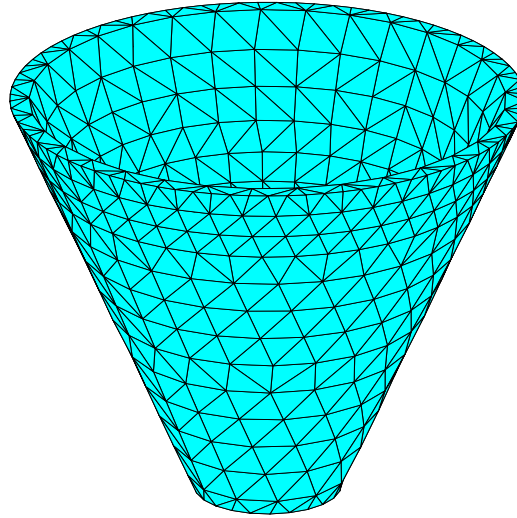


Figure 2.32 – Maillage du pavillon conique, avec le profil externe qui suit le profil interne, utilisé dans la méthode hybride (éléments de 4cm).

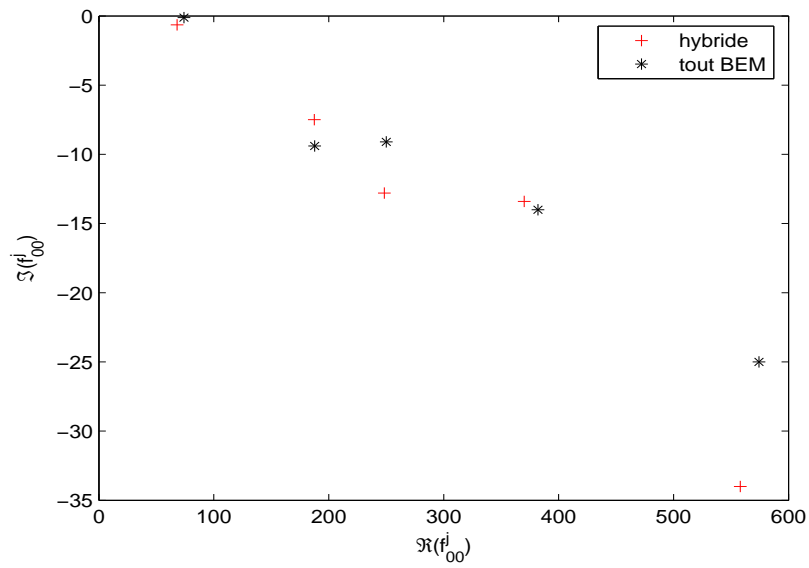


Figure 2.33 – Premières fréquences de résonances du mode plan obtenues avec la méthode entièrement BEM (\*) et avec la méthode hybride (+) dans le cas d'un système *tube + pavillon conique*.

## 2.5 Bilan du deuxième chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux méthodes basées sur les éléments finis de frontière, nous permettant d'étudier la fonction de Green et ses pôles (fréquences de résonance complexes) pour des résonateurs de différentes géométries. La première méthode décrit entièrement le système à l'aide des éléments finis de frontière, elle est donc précise mais aussi très coûteuse en temps de calcul, surtout lorsque nous montons en fréquence ou lorsque les dimensions de notre résonateur sont importantes. C'est pour cette raison que nous avons souhaité développer une méthode hybride, avec une partie du système décrite analytiquement et une autre à l'aide des éléments finis de frontière. L'avantage de cette méthode vient du fait que nous pouvons calculer l'impédance à l'entrée de la partie BEM (par exemple un pavillon), puis l'utiliser comme condition de sortie de plusieurs résonateurs décrits à l'aide de la méthode modale sans avoir à recalculer la partie BEM à chaque fois. Ceci n'est pas possible avec la première méthode car nous devons remailler tout le système même si nous ne souhaitons modifier que la partie cylindrique (que nous décrivons analytiquement avec la méthode hybride).

La mise en place de ces méthodes a demandé beaucoup de temps. Nous avons dû faire face à de nombreux problèmes numériques et toujours vérifier étape par étape notre code de calcul. C'est pour cette raison, que les principaux résultats ici présentés concernent le cas du résonateur cylindrique, afin de valider notre code dans un cas de référence. Les résultats concernant les pavillons sont une première approche des possibilités de notre code. Mais nous avons tout de même obtenu des résultats concordant entre les deux méthodes. Ceci nous permet d'envisager des études intéressantes sur la relation entre la géométrie des pavillons et le rayonnement du système complet dans le but d'arriver à une optimisation géométrique du rayonnement.

De nombreuses améliorations peuvent être apportées à notre code, notamment sur le maillage du système. En effet, nous pensons que la surface de raccord entre la partie rayonnante décrite à l'aide de la méthode BEM et la partie conservative décrite analytiquement, doit être maillée le plus finement possible afin d'avoir une bonne description du rayonnement du système complet.

## Chapitre 3

# Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Protocole expérimental . . . . .</b>	<b>92</b>
3.1.1	Dimensions du système pour les différentes configurations . . .	92
3.1.2	Choix des matériaux . . . . .	93
3.1.3	Milieu extérieur . . . . .	93
3.1.4	Choix du système source/récepteur . . . . .	94
3.1.5	Positionnement des micros . . . . .	95
3.1.6	Schéma du montage . . . . .	96
3.1.7	Etalonnage du matériel . . . . .	98
<b>3.2</b>	<b>Méthode d'analyse des résultats . . . . .</b>	<b>102</b>
3.2.1	Mesure du $\Delta f/2$ à $-3\text{dB}$ . . . . .	102
3.2.2	Méthode temporelle . . . . .	103
3.2.3	Méthode du cercle de Kennely . . . . .	105
<b>3.3</b>	<b>Cas du résonateur cylindrique . . . . .</b>	<b>109</b>
3.3.1	Mode plan . . . . .	112
3.3.2	Projection de la pression sur les modes propres du conduit . .	113
<b>3.4</b>	<b>Cas du pavillon de Bessel . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>3.5</b>	<b>Cas du pavillon conique . . . . .</b>	<b>123</b>
<b>3.6</b>	<b>Bilan du troisième chapitre . . . . .</b>	<b>126</b>

L'objectif de l'expérience présentée dans ce chapitre est de vérifier par la mesure les fréquences de résonance complexes obtenues par la méthode modale et par la méthode numérique, afin de tester notre modèle. Pour cela, nous avons choisi de réaliser quelques configurations étudiées précédemment. Dans un premier temps nous nous intéressons aux résonances d'un cylindre de longueur finie avec et sans écran afin de valider notre montage

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.1 Protocole expérimental

---

dans un cas test, puis dans un deuxième temps à celles d'un système *tube+pavillon*, pour deux géométries de pavillons différentes présentées au chapitre précédent : un pavillon de Bessel et un pavillon conique.

Avant de discuter les résultats obtenus, nous présentons en premier lieu notre montage expérimental ainsi que les différentes hypothèses faites dans notre modèle que nous avons essayé de respecter au mieux dans notre configuration expérimentale.

## 3.1 Protocole expérimental

### 3.1.1 Dimensions du système pour les différentes configurations

Etant donné que nous souhaitons observer l'apparition des deux premiers modes non plans (mode 10 et mode 01), nous devons choisir un rayon du cylindre assez important pour que les fréquences de coupure de ces modes ne soient pas trop élevées afin de rester dans la gamme de mesure des microphones disponibles (présentés par la suite). Nous avons choisi de travailler avec un rayon  $b = 0,064m$  ce qui nous donne la fréquence de coupure pour le mode 10  $f_{c,10} = 1574Hz$  et pour le mode 01  $f_{c,01} = 3276Hz$  avec  $c = 344m/s$  (rappelons que  $k_{c,10} = \lambda_{10} = 1,84/b$  et  $k_{c,01} = \lambda_{01} = 3,83/b$ ). Précisons également que ce diamètre de tuyau se trouve facilement dans le commerce ce qui facilite la réalisation du montage. Pour choisir la longueur du tuyau, nous avons dû tenir compte du fait que celui-ci devait être assez long pour que la longueur de ce dernier puisse être la même que celle du système *cylindre+pavillon*, afin de pouvoir comparer les résonances des deux configurations. La longueur du tuyau va donc dépendre des dimensions du pavillon. Compte tenu du rayon d'entrée du pavillon (égal au rayon du cylindre  $b = 0,064m$ ) nous avons choisi de travailler avec un rayon de sortie  $r_s = 0,5m$  et une longueur de pavillon  $L_p = 0,5m$  afin de rester dans des rapports entre les dimensions que nous retrouvons dans certaines applications (instruments de musique à vent, pavillon pour enceintes acoustiques...). De plus, ces dernières ont été influencées par une raison pratique car la conception de telles pièces pour des dimensions plus importantes n'étaient pas réalisable facilement avec le matériel du laboratoire. La longueur de notre pavillon étant donc choisie, nous avons opté pour une longueur totale de notre système  $L = 1m50$  ce qui va nous permettre de rester dans des proportions cohérentes entre la longueur de la partie cylindrique  $L_c = 1m$  et la longueur du pavillon  $L_p = 0,5m$ . Ainsi, la première fréquence de résonance  $f_{00,r}^0$  du système pour le tuyau seul, est aux alentours de  $55Hz$ . Il reste alors la dimension de l'écran à définir, celui ne pouvant être infini comme dans le cas théorique. Pour cela, nous avons choisi de réaliser un écran plan de dimensions CEI/2 d'après la norme 268-5 [28] (voir figure 3.1.1) qui reproduit bien l'effet du baffle infini (sauf aux basses fréquences) comme nous avons pu le voir au chapitre précédent (également utilisé comme écran normalisé dans [33]). Dans notre cas, avec un rayon  $b = 0,064m$ , cela nous donne les dimensions  $l_x = 0,864m$  et  $l_y = 1,056m$ .

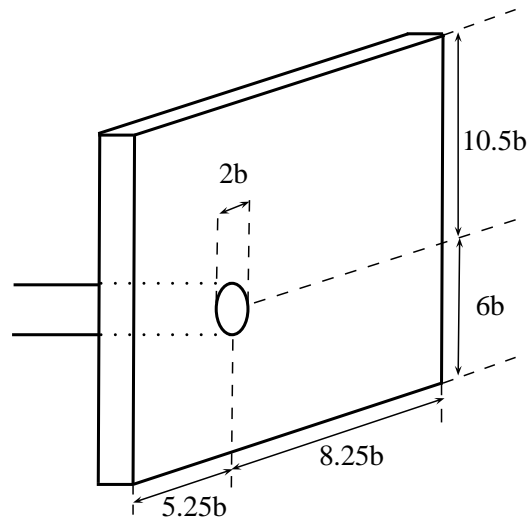


Figure 3.1 – Dimensions du baffle "normalisé" utilisé dans [33].

### 3.1.2 Choix des matériaux

La principale hypothèse que nous devons respecter dans le choix des matériaux est la condition de Neumann sur les parois de notre système, à savoir des parois parfaitement réfléchissantes et rigides. Pour cela, nous avons choisi de travailler avec un cylindre en PVC d'épaisseur  $6\text{ mm}$ , qui se trouve dans le commerce aux dimensions souhaitées. Pour l'écran nous avons opté pour un panneau en bois aggloméré d'épaisseur  $1\text{ cm}$ , rigidifié par des tasseaux afin de limiter ses vibrations. Les pavillons ont été réalisés en mousse polyuréthane afin de faciliter leur usinage et d'alléger leur poids et leur coût. Notons que nous avons estimé que les vibrations mécaniques du tuyau en PVC, des pavillons et de l'écran étaient négligeables (à l'aide d'accéléromètres).

Remarque : dans un premier temps, nous avons réalisé les mesures avec un pavillon présentant des aspérités sur sa surface, causées par la découpe lors de sa fabrication. Nous avons ensuite décidé de passer un enduit (mastic de finition *Sintofer*®) sur le pavillon afin d'obtenir une surface plus lisse et plus rigide. Ceci nous a permis de diminuer les pertes dues à la rugosité mais cela représente seulement quelques pourcents des pertes totales. Précisons néanmoins que les résultats expérimentaux ici présentés ont été obtenus avec des pavillons lissés.

### 3.1.3 Milieu extérieur

Dans notre modèle théorique, nous considérons une condition de Sommerfeld dans le milieu extérieur, ce qui implique qu'il n'y a pas d'ondes qui reviennent de l'infini. Pour répondre au mieux à cette hypothèse nous avons choisi de travailler dans une chambre anéchoïque du LMA, afin d'éviter le plus possible les ondes retours dues aux réflexions sur

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.1 Protocole expérimental

---

les parois de la pièce. Il nous reste maintenant à définir notre système source/récepteur.

#### 3.1.4 Choix du système source/récepteur

Deux possibilités se sont offertes à nous. La première est de placer la source à l'entrée de notre conduit et de faire les mesures à l'extérieur de celui-ci, ceci implique que la membrane de la source respecte la condition de Neumann (car placée à l'entrée du système) avec de petites dimensions par rapport au diamètre du tuyau car selon notre modèle, elle doit être assimilable à un point. La deuxième option est d'exciter le résonateur par une source extérieure placée dans la chambre anéchoïque avec un système de mesure situé à l'entrée du conduit. Ceci implique que notre source doit être assimilable à un point source (de petites dimensions devant la longueur d'onde) afin de pouvoir travailler par réciprocité. Cela vient du fait que si nous notons  $G(M, M')$  la fonction de Green qui décrit le rayonnement d'une source de petite dimension (par rapport à la longueur d'onde) au point  $M'$  mesuré en  $M$ , nous avons alors  $G(M, M') = G(M', M)$ , ce qui signifie que si nous intervertissons la source et le point de mesure, nous retrouvons les mêmes résultats. Nous avons choisi la deuxième possibilité car il nous est plus facile de réaliser une source de petites dimensions devant la longueur d'onde étudiée, plutôt qu'une source de quelques centimètres avec une membrane respectant la condition de Neumann et qui reste efficace aux basses fréquences.

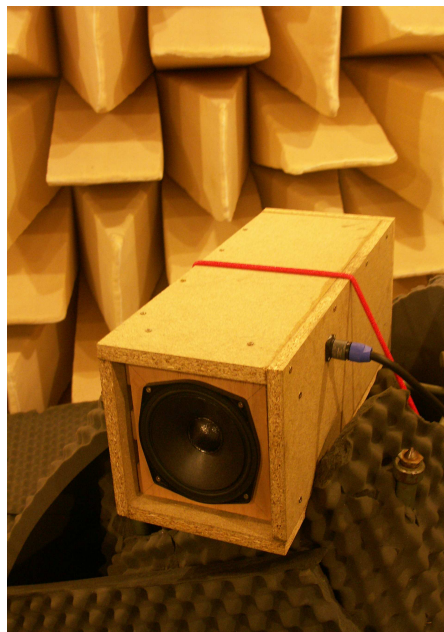


Figure 3.2 – Source d'excitation utilisée ( $24\text{cm} \times 24\text{cm} \times 57\text{cm}$ ).

Au vu des dimensions du système, la gamme de fréquences étudiées est entre  $50\text{Hz}$  et  $3500\text{Hz}$  ce qui correspond à une longueur d'onde  $\lambda$  minimale d'environ  $10\text{cm}$ . Nous devons

donc aussi obtenir des basses fréquences tout en gardant de petites dimensions, pour cela nous avons opté pour un système d'évents sur la face avant de la source. Afin d'avoir la surface avant de la source minimale, nous avons reporté le volume sur la longueur et non sur la hauteur (voir figure 3.2).

### 3.1.5 Positionnement des micros

Les mesures sont effectuées à l'entrée du résonateur où nous avons positionné 5 micros à électret, montés dans des supports demi-pouce, sur un bouchon encastré et vissé sur le conduit. Les capsules de ces derniers sont affleurantes avec la surface afin de bien reproduire la condition de Neumann comme montré sur la figure 3.3. Nous utilisons ce réseau de cinq micros (assimilable à un système d'antennerie) afin de pouvoir visualiser les modes non plans. En effet, comme nous le verrons par la suite, ce système va nous permettre d'obtenir une décomposition modale de la pression comme dans le cas de la méthode modale et de la méthode hybride présentées aux chapitres précédents. Le placement des micros a été choisi en fonction des déformées modales des différents modes comme nous pouvons le voir sur la figure 3.4. Sur la figure 3.5 nous avons tracé la déformée modale du mode 01 pour les dimensions de notre système dans le but de repérer les noeuds de pression (situés sur un cercle de rayon  $r=4\text{cm}$ ) afin de ne pas placer nos micros dessus (la position des micros est définie sur la figure 3.3 et est donnée plus précisément dans la table 3.1). Les valeurs des déformées modales sur les différentes positions des micros sont données dans la table 3.2. Nous utilisons pour cela, la définition des fonctions propres donnée au chapitre 1, où  $\Phi_{mn} = \frac{J_m(\lambda_{mn}r)}{N_{mn}}$  avec  $N_{mn} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\lambda^2 b^2}} J_m(\lambda_{mn}b)$ .

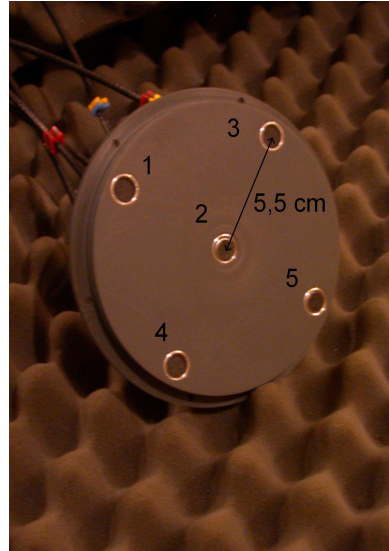


Figure 3.3 – Bouchon avec les 5 micros demi-pouces.

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.1 Protocole expérimental

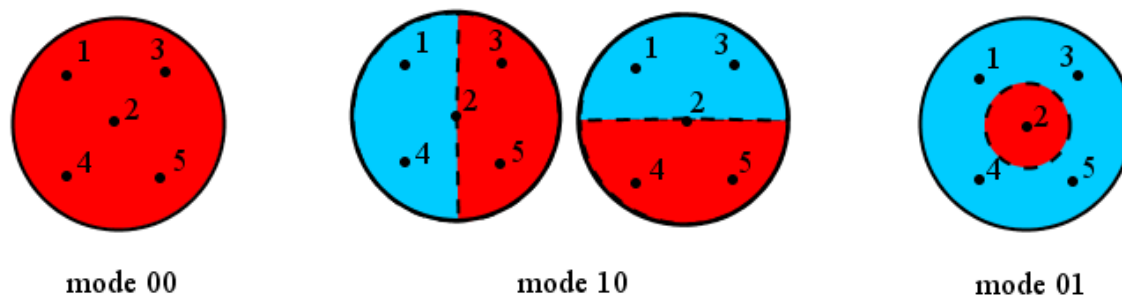


Figure 3.4 – Profil de la pression sur les 5 micros de mesure pour le mode 00, 10 et 01.

micro	r (m)	$\theta$ (rad.)
1	0,055	$3\pi/4$
2	0	0
3	0,055	$\pi/4$
4	0,055	$-3\pi/4$
5	0,055	$-\pi/4$

Table 3.1 – Coordonnées des positions des différents micro sur le bouchon à l'entrée du système.

$\Phi_{mn}$	micro 1	micro 2	micro 3	micro 4	micro 5
$\Phi_{00}$	1	1	1	1	1
$\Phi_{10}$	$-0,82+0,82i$	0	$0,82+0,82i$	$-0,82-0,82i$	$0,82-0,82i$
$\Phi_{01}$	0,85	-2,48	0,85	0,85	0,85

Table 3.2 – Valeurs des fonctions propres  $\Phi_{mn}$  du cylindre pour les différentes positions des micros sur le bouchon à l'entrée du système.

#### 3.1.6 Schéma du montage

Nous pouvons voir le schéma de notre montage sur la figure 3.6. Il est important de noter que nous avons placé un petit montage entre l'amplificateur et la source nous permettant d'obtenir l'intensité  $I$  et la tension  $U$  (divisée par 10) du signal envoyé à la source. Ceci nous permet de bien contrôler notre signal et de diminuer les problèmes de masses parasites dus aux différents éléments placés entre le PC et la source (système d'acquisition OROS, oscilloscope et amplificateur). L'intensité  $I$  obtenue, est directement reliée à la force appliquée au haut-parleur ( $F = (B\ell)I$  où  $B$  est le champ induit dans la bobine et  $\ell$  la longueur du fil de cette dernière). Quant à la tension  $U$ , elle est reliée à l'impédance



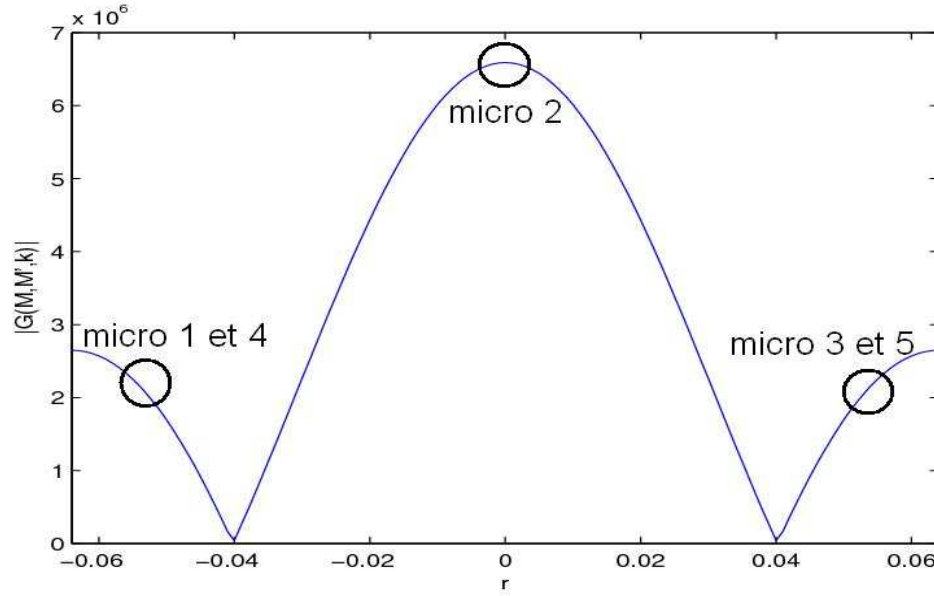


Figure 3.5 – Profil sur la section d'entrée (en  $z = -1,5m$ ) de la fonction de Green à une fréquence de résonance du mode 01, avec la position des différents micros.

du haut-parleur  $Z_h$  ainsi qu'à l'intensité ( $U = Z_h I + (B\ell)v$  où  $Z_h = R_h + iL_h\omega$ ). Nous utilisons donc l'intensité à la sortie de ce montage comme référence de notre signal envoyé à la source plutôt que la tension qui dépend elle-même de l'intensité.

Mais précisons que nous disposons d'une autre référence correspondant à la pression mesurée par un micro de référence notée  $\mu_{ref}$  sur le schéma 3.6. Ce micro doit être placé très proche (2 cm dans notre cas) de la membrane du haut-parleur afin de mesurer la réponse du haut-parleur sans l'influence de la salle et du système *cylindre+pavillon*. Des mesures pour différentes positions du micro de référence sont présentées dans la partie étalonnage du matériel. Dans la suite nous utilisons la pression mesurée par ce micro  $\mu_{ref}$  comme signal de référence plutôt que l'intensité  $I$  mesurée entre l'ampli et la source qui ne tient pas compte du comportement de cette dernière alors que la pression mesurée sur  $\mu_{ref}$  est directement reliée au débit émis par la source. La fonction de transfert entre la pression mesurée sur les micros à l'entrée du système (notés  $\mu$  sur 3.6) et la pression de référence mesurée par  $\mu_{ref}$  est notée  $H_1$  dans la suite du manuscrit. Elle est alors exprimée en dB relativement à la pression de référence ( $H_1 = 20 \log_{10}(P_\mu/P_{\mu_{ref}})$ ).

Notons également que notre source est située dans l'axe du système *cylindre+pavillon*, car pour l'instant nous ne nous intéressons pas à la directivité de ce dernier. La distance entre la source et la sortie du système doit être assez grande pour que nous puissions faire l'approximation champ lointain, dans notre cas elle est d'environ 3m. Cela fait intervenir la réponse de la salle dont les caractéristiques sont présentées par la suite.

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.1 Protocole expérimental

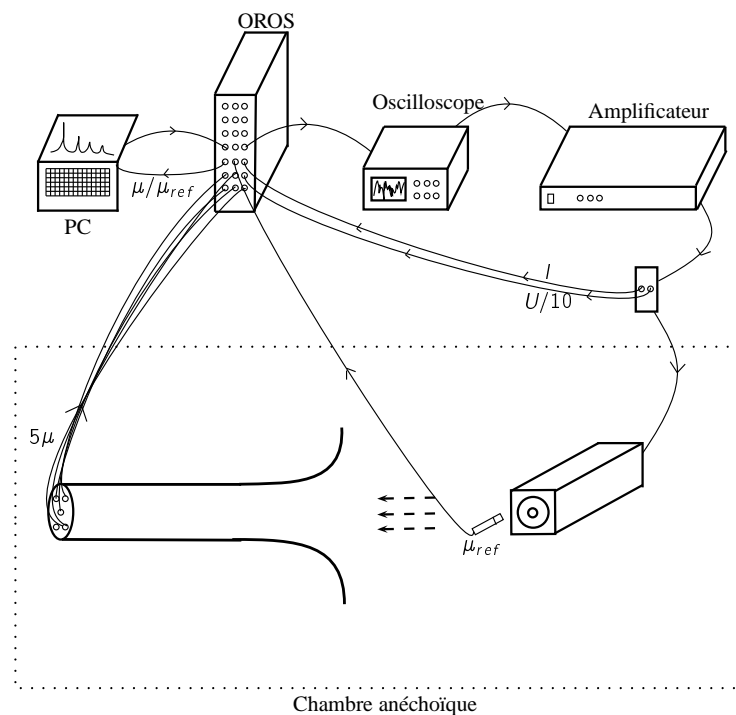


Figure 3.6 – Schéma du montage.

#### 3.1.7 Etalonnage du matériel

##### Etalonnage des micros

Pour cette expérience nous avons à notre disposition cinq microphones à électret, montés dans des adaptateurs demi-pouce que nous avons placés sur le bouchon à l'entrée du système comme montré sur la figure 3.3. Pour étalonner ces derniers, nous avons utilisé le montage présenté sur la figure 3.7. Celui-ci est constitué d'un cylindre de longueur 5cm, ce qui nous donne une première résonance vers 1700Hz. Le principe de cette méthode est de tracer la fonction de transfert entre le micro à étalonner et un micro de référence (dans notre cas de sensibilité  $55,53 \text{ mV/Pa}$ , de marque G.R.A.S. Sound Vibration de Type 40 AF) en réponse à une excitation en bruit blanc. Nous pouvons voir les différents résultats sur la figure 3.8. Malheureusement, les dimensions du dispositif utilisé nous empêchent de monter au dessus de 1500Hz. La sensibilité des différents micros est définie à l'aide d'un pistonphone qui émet une fréquence de 1kHz à 94 dB, nous pouvons voir les valeurs de plusieurs mesures de la sensibilité des micros sur la table 3.3. Il est important de noter que les différentes mesures de sensibilité pour un même micro donnent des écarts maximum de 10% (dans la table 3.3,  $\bar{\epsilon}$  est le pourcentage d'écart entre la plus grande et la plus petite valeur de la sensibilité pour un même micro). Malheureusement, nous n'avons pas de micros plus précis à notre disposition. Les résultats présentés par la suite peuvent

être considérés comme préliminaires mais, comme nous le verrons, suffisant pour avoir une première validation de notre modèle.

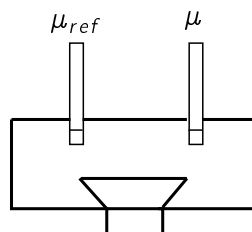


Figure 3.7 – Dispositif utilisé pour l'étalonnage des micros  $\mu$ .

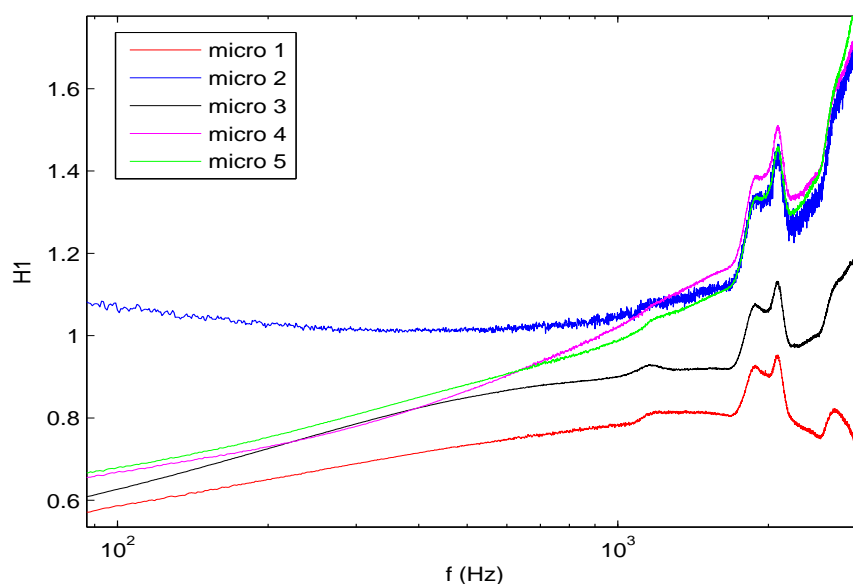


Figure 3.8 – Fonction de transfert  $H_1$  entre la pression du micro de référence et la pression des différents micros du bouchon placés dans le dispositif représenté sur la figure 3.7, en réponse à une excitation en bruit blanc.

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.1 Protocole expérimental

micro	sensibilité le 9/10/09	sensibilité le 13/11/09	sensibilité le 17/12/09	sensibilité le 20/01/10	$\bar{\epsilon}$
1	55,1	59,6	53,7	59,6	9,9%
2	85,5	83,6	88	79,8	9,3%
3	69,3	72,9	66,4	64,8	11,2%
4	37,4	40,1	36,9	40	8,1%
5	43,1	45,3	42,6	41,7	8%

Table 3.3 – Sensibilité (en mV/Pa) des différents micros utilisés ainsi que la différence  $\bar{\epsilon}$  en % entre la plus grande et la plus petite sensibilité mesurée pour différents jours.

### Caractéristiques de la source et de la salle

Pour caractériser notre source, nous allons étudier la fonction de transfert notée  $H_i$  entre la pression mesurée sur le micro de référence  $\mu_{ref}$  situé à quelques centimètres de la membrane et l'intensité  $I$  mesurée entre l'amplificateur et la source. Cette fonction de transfert est exprimée en dB relativement à l'intensité  $I$  ( $H_i = 20 \log_{10}(P(\mu_{ref})/I)$ ).

Dans un premier temps, essayons de voir à quelle distance nous devons placer notre micro de référence afin de ne mesurer que la réponse de la source sans l'influence de la salle ou du système ("cylindre" ou "cylindre+pavillon").

A l'aide de la figure 3.9, nous notons que nous obtenons la même mesure de la fonction de transfert  $H_i$  lorsque le micro est placé à 10cm ou à 2cm de la membrane. Nous voyons que ce n'est pas le cas lorsque le micro de référence est situé à 1m et à 3m de la source, les mesures sont alors influencées par la réponse de la salle. Il est important de remarquer que lorsque le micro est placé à 3m de la source, cela correspond à l'endroit où nous placerons notre système à étudier. En comparant les mesures de la réponse de la source à 2cm de la membrane ( $H_i = \mu_{ref}/I$ ) et la réponse de la source sur un micro situé à 3m de la membrane ( $H_i = \mu_{3m}/I$ ) à l'aide de la figure 3.9, nous remarquons que la salle a une influence sur les mesures, notamment en basses fréquences où la pièce n'est pas parfaitement anéchoïque, ainsi qu'à partir de 1000Hz où la directivité de la source commence à être influente (elle ne se comporte plus comme un monopôle). Cependant nous n'avons pas tenu compte de la réponse de la salle sur nos mesures dans les résultats présentés ici. Pour cela il aurait fallu connaître la réponse de la pièce en fonction de la température et précisément pour chaque fréquence. En effet, par la suite nous effectuons des zooms autour de certaines fréquences, il nous aurait donc fallu connaître la réponse de la salle pour exactement les mêmes fréquences afin de pouvoir faire la fonction de transfert avec nos mesures. Nous n'avons pas eu le temps de mettre en place de telles mesures et nous avons décidé que dans un premier temps l'influence de la salle sur les mesures serait négligée.

Il est important de remarquer également, à l'aide de la figure 3.10, que lorsque le micro de référence est situé à quelques centimètres de la source, nous mesurons bien seulement le champ proche émis par la source sans l'influence des différents systèmes à étudier. Précisons que lors des mesures, le micro  $\mu_{ref}$  est toujours placé dans l'axe de la source car nous ne

souhaitons pas aborder la directivité dans notre étude.

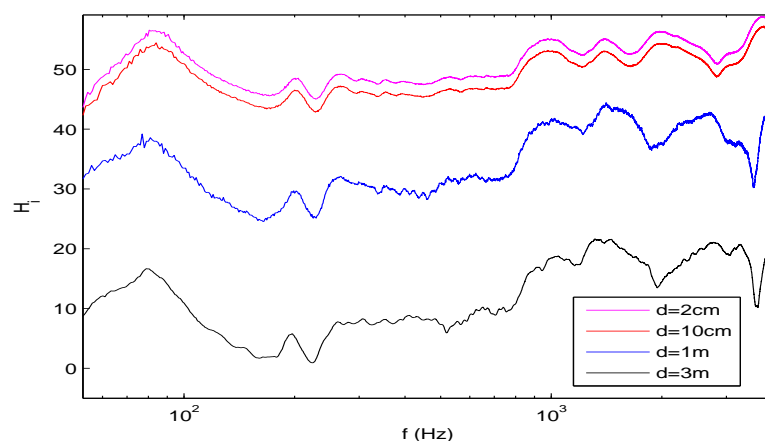


Figure 3.9 – Fonction de transfert  $H_i$  décrivant le rapport entre le micro de référence ( $\mu_{ref}$ ) situé à une distance  $d$  de la source et l'intensité du signal bruit blanc envoyée sur celle-ci pour différentes distances  $d$ .

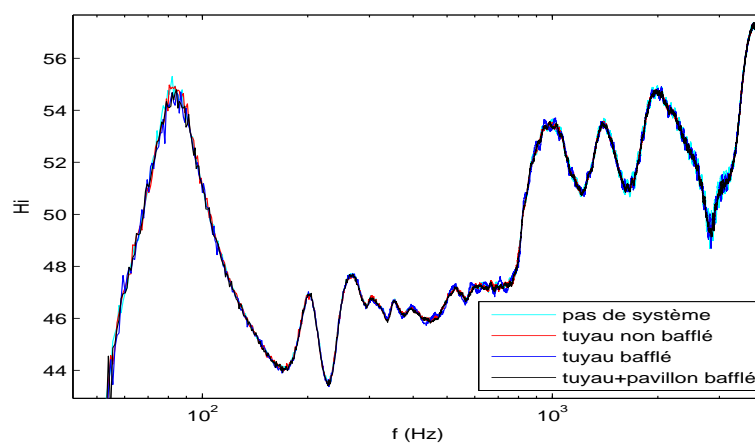


Figure 3.10 – Fonction de transfert  $H_i$  décrivant le rapport entre le micro de référence ( $\mu_{ref}$ ) situé à 2cm de la source et l'intensité du signal bruit blanc envoyée sur celle-ci pour les différentes configurations.

## 3.2 Méthode d'analyse des résultats

Dans cette partie nous présentons les différentes méthodes utilisées pour analyser les résultats obtenus. En effet, il existe plusieurs méthodes d'analyse pour obtenir la partie réelle (correspondant à la fréquence du pic de résonance) et surtout la partie imaginaire (correspondant aux pertes du système) de la fréquence de résonance à partir du signal mesuré. Nous exposons rapidement trois méthodes utilisées en essayant de dégager leurs avantages et leurs inconvénients. Précisons que pour les mesures présentées par la suite nous n'avons pas tenu compte de la réponse de la salle. Mais nous allons voir que dans un premier temps cette approximation nous permet tout de même d'obtenir une première validation de notre modèle théorique.

### 3.2.1 Mesure du $\Delta f/2$ à $-3\text{dB}$

Une des méthodes les plus connues, consiste à se placer sur le pic de la résonance et de mesurer la demie largeur du pic de résonance  $\Delta f/2$  estimée à  $-3\text{ dB}$ . Cette méthode est analogue à celle utilisée en électronique pour connaître le facteur de qualité. Ce dernier est défini tel que  $Q = f_r/\Delta f$  à  $-3\text{ dB}$  (avec  $f_r$  la fréquence de résonance), étant donné que le facteur de pertes recherché vaut  $\zeta = f_r/2Q$  nous avons bien  $\zeta = \Delta f/2$  (voir chapitre 2 de [31]). Sur la figure 3.11, nous pouvons voir la valeur du pic d'une résonance du tuyau à  $277,5\text{ Hz}$ , nous devons donc nous placer à  $-3\text{ dB}$  pour calculer le  $\Delta f$  qui nous donne  $\Delta f/2 = (279,9 - 275)/2 = 2,45$ , la fréquence de résonance obtenue vaut alors  $277,5 - 2,45i$ . Nous voyons que cette méthode est facile à mettre en place mais cela nécessite d'avoir plus de  $3\text{ dB}$  de dynamique sur une résonance, ce qui n'est plus le cas lorsque nous montons en fréquence et que le système devient très amorti où il est de plus très dur de connaître précisément la valeur du pic. Cependant, cette méthode nous servira par la suite à avoir facilement une première approximation des résonances dans de nombreux cas. Remarquons ici que sur la figure 3.11, nous observons une différence de pression sur les différents micros, ce ne devrait pas être le cas car nous sommes à une fréquence où la pression est plane (même pression sur tous les micros). Cela est sans doute dû aux imprécisions de l'étalonnage de part la mauvaise qualité de nos micros. Précisons cependant que cela aurait pu être utilisé pour recalibrer les sensibilités des micros par rapport à une référence. Mais dans un premier temps nous nous contenterons d'utiliser les mesures telles quelles.

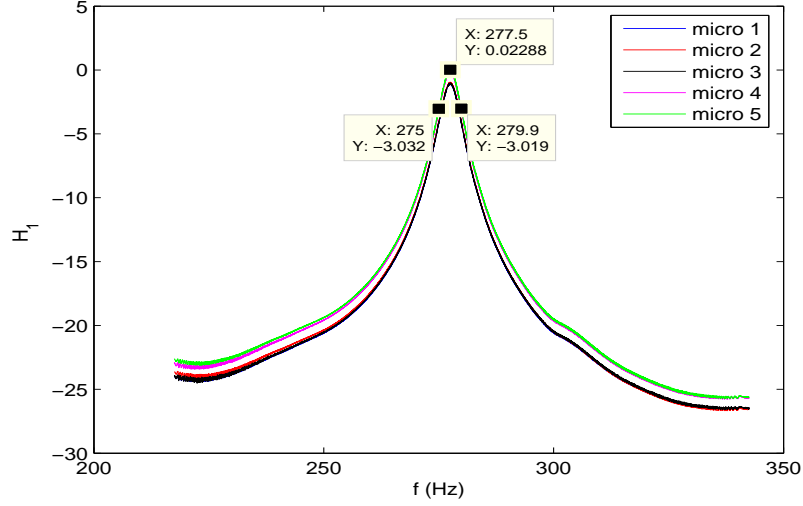


Figure 3.11 – Fonction de transfert  $H_1$  avec une excitation en sinus variant de 220Hz à 340Hz dans le cas du cylindre de 1m50 bafflé avec écran.

### 3.2.2 Méthode temporelle

Une autre technique pour obtenir la partie imaginaire de la fréquence de résonance est d'exciter le système à l'aide d'un sinus à une fréquence de résonance ( $\omega_r$ ) du système puis d'éteindre la source. La décroissance du signal nous donne directement le coefficient de perte du système pour cette fréquence.

Notons la fréquence de résonance

$$\omega_r - i\omega_i,$$

la réponse du système  $f(t)$  est telle que

$$f(t) \propto \sin(\omega_r t) \exp^{-i\omega_i t}.$$

En faisant le rapport de cette réponse à deux instants  $t$  et  $t'$ , nous obtenons :

$$\frac{|f(t')|}{|f(t)|} = \exp^{\omega_i(t-t')},$$

ainsi en prenant le log de cette fraction, nous obtenons le coefficient de pertes correspondant à la partie imaginaire de la fréquence de résonance de partie réelle  $\omega_r$  :

$$\omega_i = \frac{\log(|f(t')|) - \log(|f(t)|)}{t - t'}. \quad (3.1)$$

Si nous travaillons avec  $f_r = \omega_r/2\pi$ , les pertes  $f_i$  s'expriment alors telles que  $f_i = \omega_i/2\pi$ . Nous pouvons voir sur la figure 3.12 le signal obtenu en excitant le système à sa troisième

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.2 Méthode d'analyse des résultats

---

résonance ( $f_r = 277,5\text{Hz}$ ) puis la décroissance obtenue après l'extinction du signal. Dans ce cas les pertes valent  $f_i = (\log(0,7474) - \log(0,1795))/(3,095 - 3,2)/2\pi = 1,97$ , la fréquence de résonance vaut donc  $277,5 - 1,97i$ . Cette méthode est difficile à mettre en place lorsque l'amortissement est important car nous avons alors des difficultés à connaître précisément la valeur de la fréquence de résonance, ce qui ne nous permet plus d'exciter le système à la bonne fréquence. Ainsi, nous ne l'utilisons plus par la suite. De plus cette méthode ne tient pas seulement compte des pertes induites par le système seul mais aussi de l'amortissement de la source.

Précisons cependant que cette méthode nous permet de mettre en évidence le lien entre la partie imaginaire de nos fréquences de résonances et les transitoires (temps de croissance ou de décroissance) de chaque résonance.

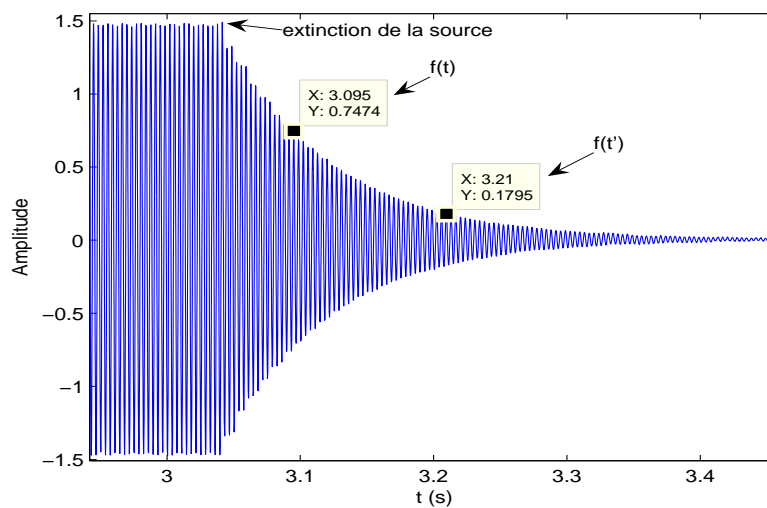


Figure 3.12 – Signal temporel obtenu en excitant le système avec un sinus à une fréquence de résonance du système puis en coupant l'excitation après quelques secondes.



### 3.2.3 Méthode du cercle de Kennely

Nous présentons ici rapidement le principe de cette méthode, se référer à la thèse de Le Roux [34] pour plus de détails .

La fonction de transfert mesurée  $H_{mesure}(f)$  (dans notre cas entre les micros situés sur le bouchon et le micro de référence, notée  $H_1$  précédemment), peut être approchée sous la forme suivante :

$$H_{mesure}(f) \simeq G_0 + R_1 H_{app}(f),$$

où  $G_0$  et  $R_1$  sont des quantités complexes ayant la dimension de la grandeur mesurée  $H_{mesure}$ . La fonction  $H_{app}(f)$  est une fonction adimensionnée dont le module correspond à une fonction de Lorentz, exprimée sous la forme :

$$H_{app}(f) = \frac{1}{1 + jQ(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f})}$$

où  $f_r$  est la fréquence de résonance (correspondant au pôle de  $H_{app}$ ) et  $Q$  le facteur de qualité.

Dans cette méthode la fonction de transfert mesurée est ainsi estimée comme étant un pic de Lorentz plus l'influence des autres pics de résonances décrite ici par la grandeur  $G_0$ . Ainsi, si nous voulons mesurer la fréquence de résonance d'un pic sans l'influence des autres, nous devons procéder de manière itérative telle que :

identification du 1<sup>er</sup> pic autour de  $f_{r1}$  :  $H_{mesure} \simeq G_0 + R_1 H_{app}(f_{r1}, Q_1)$ ,

élimination de ce pic :  $H_1 = H_{mesure} - R_1 H_{app}(f_{r1}, Q_1)$ ,

identification du 2<sup>me</sup> pic autour de  $f_{r2}$  :  $H_1 \simeq G_1 + R_2 H_{app}(f_{r2}, Q_2)$ ,

élimination de ce pic :  $H_2 = H_1 - R_2 H_{app}(f_{r2}, Q_2)$ ,

identification du 3<sup>me</sup> pic autour de  $f_{r3}$  :  $H_2 \simeq G_3 + R_3 H_{app}(f_{r3}, Q_3)$ ,

...

Nous pouvons voir sur la figure 3.13 la représentation de la fonction  $H_{mesure}$  dans le plan complexe, où  $Z_{max}$  placé sur le cercle de rayon  $G_0 + R_1$  correspond à la valeur de la résonance du système. Il est d'usage, par des changements de variables, de se ramener à la représentation tracée sur la figure 3.14. L'estimation des paramètres se fait à l'aide d'une méthode des moindres carrés (entre les valeurs mesurées et celles approchées).

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.2 Méthode d'analyse des résultats

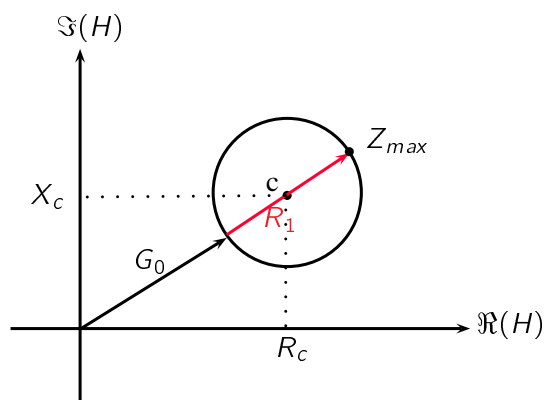


Figure 3.13 – Coordonnées du cercle de Kennely représentant la fonction de transfert mesurée  $H_{mesure}$  dans le plan complexe.

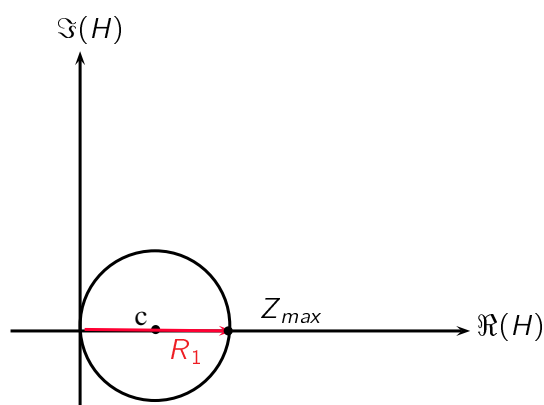


Figure 3.14 – Coordonnées du cercle de Kennely simplifié représentant la fonction de transfert mesurée  $H_{mesure}$  dans le plan complexe.

Nous pouvons voir sur la figure 3.15 une estimation d'une résonance du système étudié (tuyau de 1m50 avec écran) avec l'approximation du cercle de Kennely. Nous voyons que l'approximation est très bonne même si le résidu ( $G_0 = H_{mesure} - R1 * H_{app}$ ), correspondant à l'influence des autres pics dans cette gamme de fréquence, n'est pas nul. Nous obtenons une fréquence de résonance qui vaut  $277,46 - 2,4i$ , nous retrouvons bien la valeur obtenue avec la première méthode. Un zoom de  $H_{mesure}$  dans le plan complexe est tracée sur la figure 3.16. Nous voyons alors que l'approximation (qui nous a permis d'obtenir  $Z_{max}$ ) est en bon accord avec nos mesures (à comparer à la figure théorique 3.14).

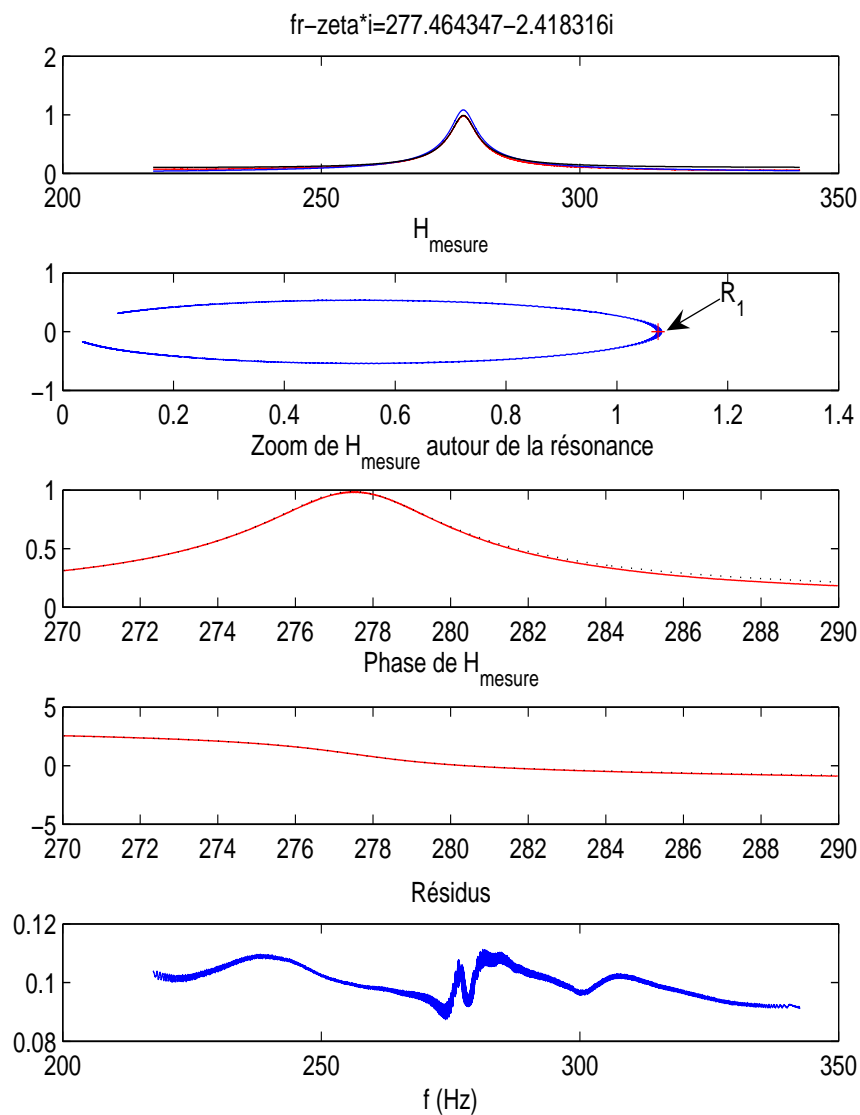


Figure 3.15 – Méthode du cercle de Kennely appliquée à une résonance du système avec  $H_{mesure}$  (rouge) superposé à l'approximation  $G_0 + R_1 H_{app}(f)$  (noir pointillé) ainsi qu'au pic de Lorentz seul  $R_1 * H_{app}(f)$  (bleu). La dernière figure représente le résidu  $G_0$  (correspondant à l'influence des autres pics).

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.2 Méthode d'analyse des résultats

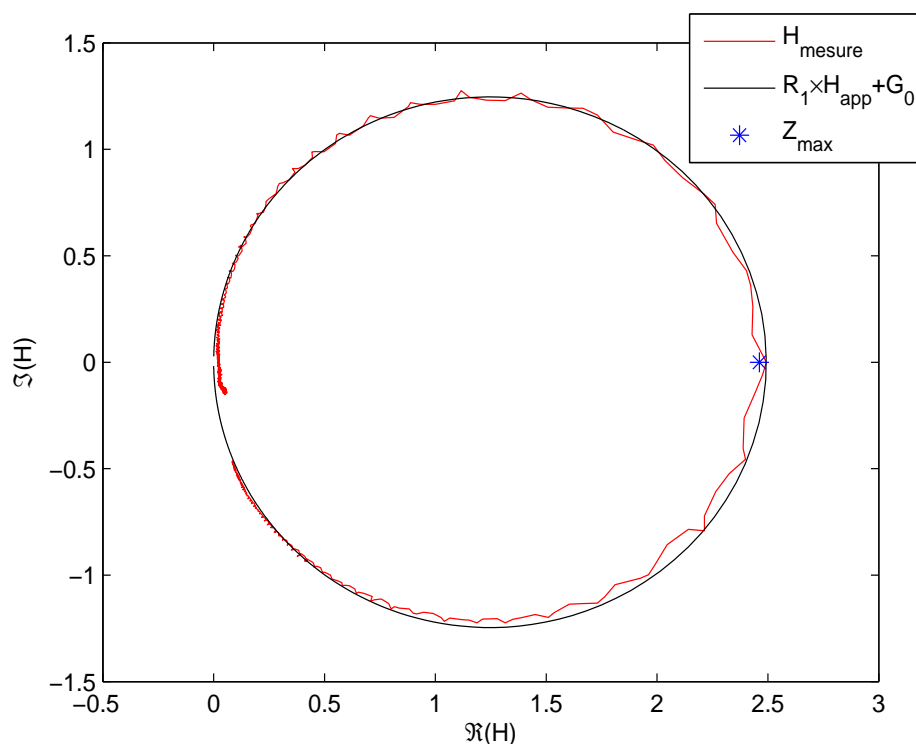


Figure 3.16 – Cercle de Kennely obtenu en traçant la fonction de transfert mesurée  $H_{\text{mesure}}$  dans le plan complexe.

Cette méthode est de plus très robuste (3 points suffisent à définir une résonance même si en pratique il est conseillé d'en utiliser plus). C'est donc celle-ci que nous utiliserons principalement pour l'analyse de nos mesures.

Précisons ici que dans nos mesures nous avons un retard de phase dû à la propagation du signal dans le milieu extérieur. Pour corriger ce dernier, nous traçons la droite moyenne de la phase dont le coefficient directeur correspond au retard. Il est nécessaire de faire cette correction car la méthode du cercle de Kennely est basée sur un modèle à phase minimale.

### 3.3 Cas du résonateur cylindrique

Nous nous sommes attachés dans un premier temps à mesurer la réponse d'un simple cylindre ( $L = 1m50$  et  $b = 0,064m$ ) dans le cas sans écran (voir figure 3.17) et dans le cas avec écran (voir figure 3.18).

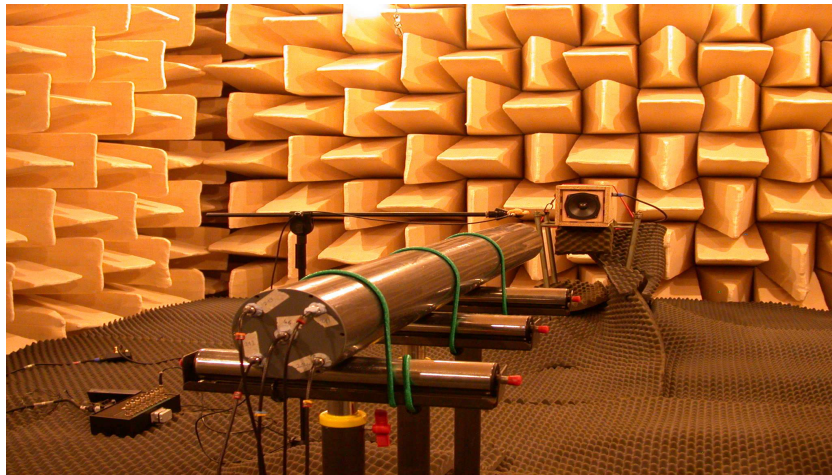


Figure 3.17 – Montage expérimental pour le cas du cylindre ( $L = 1m50$  et  $b = 0,064m$ ) sans écran.

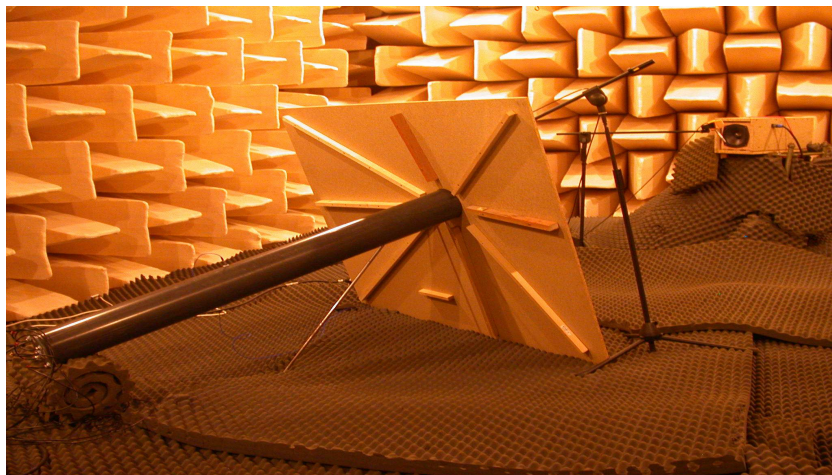


Figure 3.18 – Montage expérimental pour le cas du cylindre ( $L = 1m50$  et  $b = 0,064m$ ) avec écran.

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.3 Cas du résonateur cylindrique

Pour obtenir une première approximation des résonances du système, nous l'excitons avec un bruit blanc, la fonction de transfert  $H_1$  alors obtenue est représentée sur la figure 3.19. Nous observons l'apparition de plusieurs modes à des fréquences bien définies (fréquences de coupures correspondantes). Nous pouvons les identifier à l'aide de la représentation des déformées modales correspondantes tracées sur la figure 3.4. En effet, lors d'une résonance du mode 10, nous observons par exemple un maximum de pression sur les micros 1 et 4 et un autre maximum sur les micros 3 et 5, comme nous pouvons le voir sur la figure 3.20. De même, lorsque nous sommes sur une fréquence de résonance du mode 01, nous observons à l'aide de la figure 3.21, que nous avons alors un maximum de pression sur le micro du centre (micro 2) et un autre maximum sur les 4 autres. Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux résonances du mode plan. Précisons que dans la suite du rapport, les résultats présentés tiennent compte des pertes visco-thermiques avec le modèle présenté dans l'annexe G.

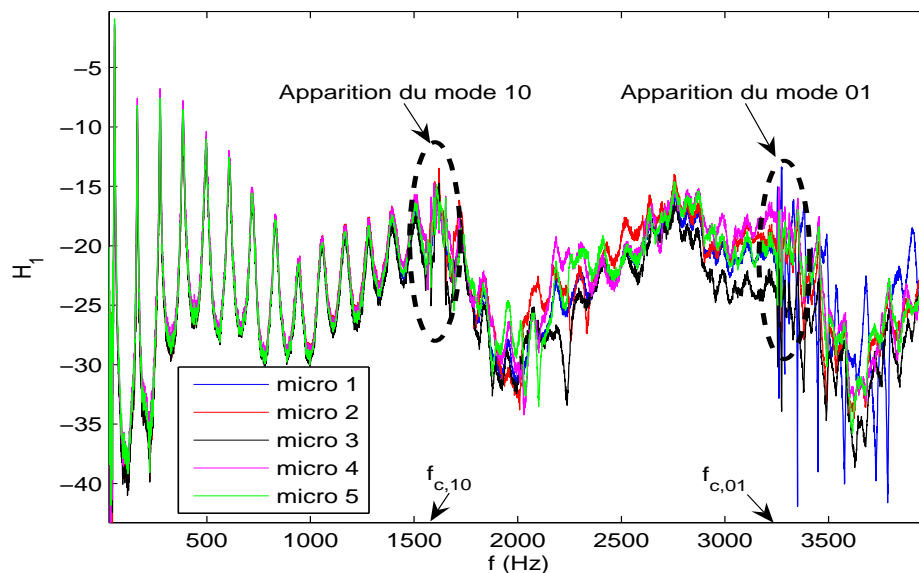


Figure 3.19 – Fonction de transfert  $H_1$  obtenue entre les micros à l'entrée du tuyau et le micro de référence, pour une excitation en bruit blanc, avec écran.

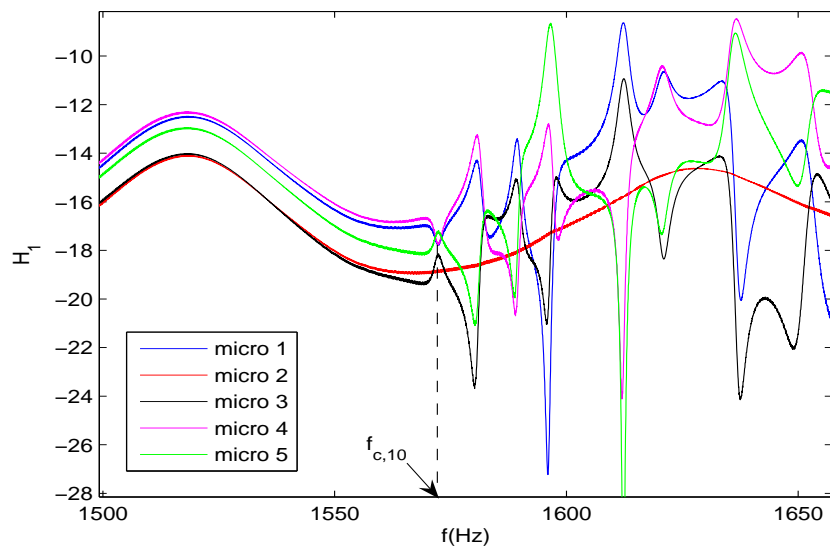


Figure 3.20 – Fonction de transfert  $H_1$  obtenue avec une excitation en sinus balayé, où nous pouvons voir l'apparition du mode 10.

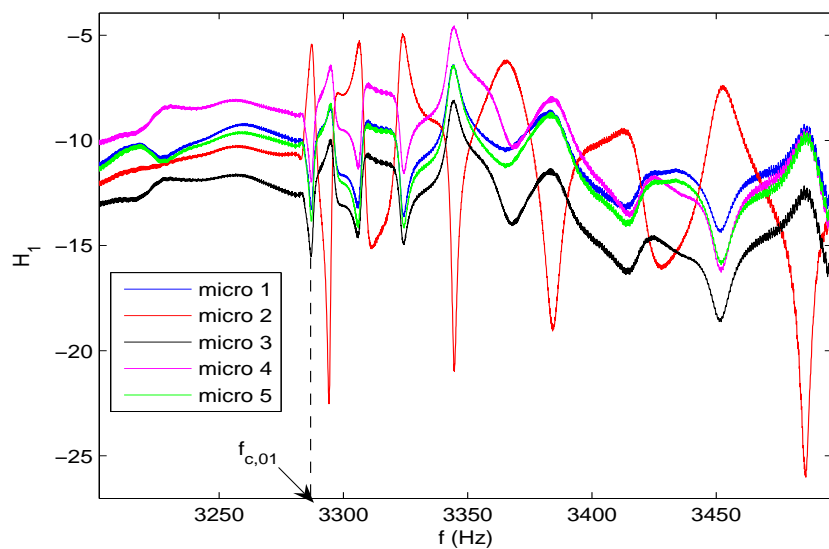


Figure 3.21 – Fonction de transfert  $H_1$  obtenue avec une excitation en sinus balayé, où nous pouvons voir l'apparition du mode 01.

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.3 Cas du résonateur cylindrique

#### 3.3.1 Mode plan

Pour obtenir précisément les fréquences de résonance, nous excitons notre système avec un sinus variant dans une fenêtre fréquentielle définie autour d'un pic de résonance (dont la position est préalablement repérée à l'aide des mesures en bruit blanc).

Sur la figure 3.22, nous avons tracé les fréquences de résonances obtenues expérimentalement, dans le cas d'un système avec et sans écran. Nous pouvons voir que les résonances obtenues dans le cas avec écran sont en très bonne adéquation avec notre modèle basé sur la théorie modale. Sur cette même figure, nous pouvons voir que lorsque le système est sans écran, les pertes (principalement le rayonnement) du système sont moindres que dans le cas avec écran. Nous voyons de plus sur la figure 3.23, que lorsque nous traçons la correction de longueur associée aux résonances (à partir de leurs parties réelles :  $\Delta L = \frac{(2j+1)\pi}{2\Re(k'_{00,r})} - L$ ), nous retrouvons bien les corrections de longueurs théoriques associées aux cas avec et sans écran.

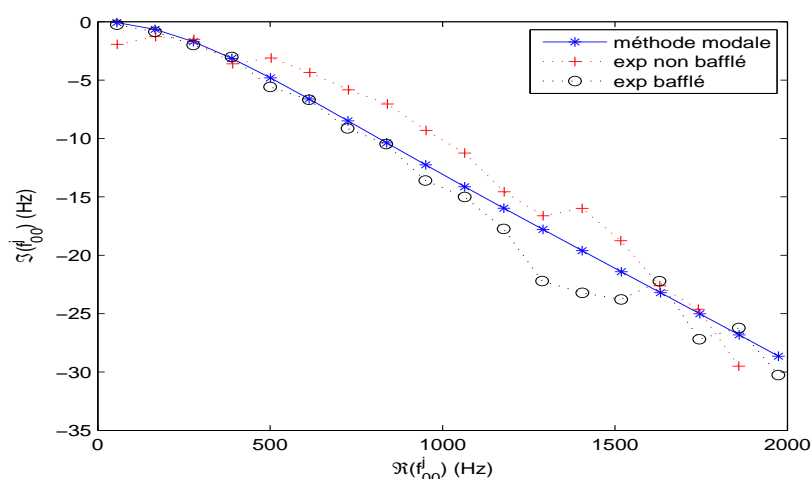


Figure 3.22 – Fréquences de résonance  $f_{00,r}^j$  dans le cas théorique (\*) et expérimental avec écran (o) et sans écran (+).

Précisons que pour les résultats présentés sur la figure 3.23, les pertes dues aux effets visco-thermiques ont été soustraites afin de bien isoler les effets dus au rayonnement. Pour cela, nous avons calculé la valeur de ces pertes aux différentes fréquences à l'aide du modèle présenté dans l'annexe G, puis nous les avons soustraites de l'amortissement mesuré.

Ces résultats nous permettent de vérifier que malgré les hypothèses et les incertitudes présentes dans nos mesures, notre montage expérimental nous donne tout de même une première validation de notre modèle théorique pour le cas du mode plan. Essayons maintenant de voir ce qu'il en est pour les fréquences de résonance des autres modes. Pour cela, nous allons utiliser la même méthode que dans le cas de la théorie modale ou d'éléments finis de frontière, qui consiste à projeter les pressions mesurées par les 5 micros sur les



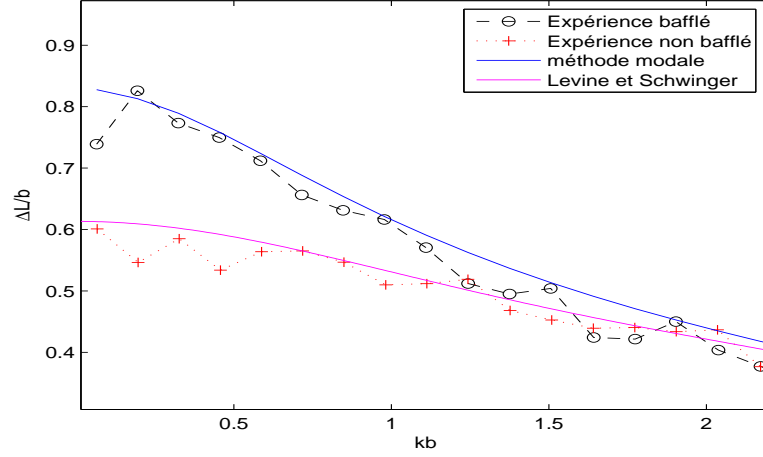


Figure 3.23 – Correction de longueur  $\Delta L$  dans le cas théorique (—) et expérimental (avec écran + et sans écran o).

modes propres  $\Phi_{mn}$  du conduit.

### 3.3.2 Projection de la pression sur les modes propres du conduit

Une autre façon d'étudier les résultats obtenus est de faire la projection des mesures (faites sur nos micros situés sur le bouchon) sur les fonctions propres  $\Phi_{mn}$  du guide. Cela nous permet ainsi de voir apparaître plus précisément les différents modes. La méthode peut se résumer de la manière suivante :

$$p = M\Phi,$$

où la matrice  $M$  de taille  $N_f \times N_m$  (où  $N_f$  est le nombre de fréquence et  $N_m$  le nombre de micro, ici 5) contient les mesures des 5 micros aux différentes fréquences et la matrice  $\Phi$  de taille  $N_m \times N_{mode}$  (où  $N_{mode}$  est le nombre de modes pris en compte, ici 3 : mode 00,10 et 01) contient la valeur des différents modes  $\Phi_{mn}$  pour les différentes positions des micros. Rappelons que ces valeurs sont données dans la table 3.2.

Nous pouvons voir sur la figure 3.24 la projection des mesures de pression des 5 micros (celles tracées sur la figure 3.19) sur le mode plan du guide. Nous voyons bien qu'il ne reste presque que les résonances correspondant au mode plan. Sur les figures 3.25 et 3.26 nous pouvons voir la projection des mêmes mesures, respectivement sur le mode 10 et 01 du guide. Dans ces deux derniers cas, nous voyons bien apparaître les résonances dues au mode 10 ou 01 suivant le cas, mais nous voyons aussi les résonances dues au mode plan même si l'amplitude des pics est beaucoup plus faible que dans le cas de la projection sur le mode plan. Ceci est sans doute dû à l'imprécision sur la sensibilité de nos micros (voir la table 3.3). Mais cette méthode reste très pratique pour isoler les différents modes. En

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.3 Cas du résonateur cylindrique

---

effet, lorsque nous nous intéressons plus précisément aux premières résonances du mode 10 tracées sur la figure 3.27 ou à celles du mode 01 représentées sur la figure 3.28, nous voyons bien apparaître des pics de résonances. Les parties réelles de ces dernières sont retranscrites et comparées à la théorie modale dans la table 3.4 pour le mode 10 et dans la table 3.5 pour le mode 01.

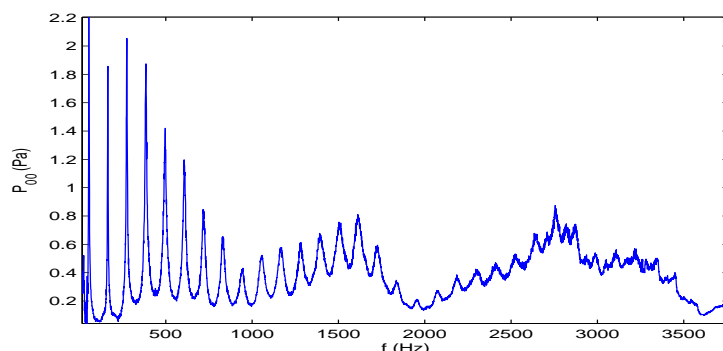


Figure 3.24 – Projection des mesures des 5 micros sur la fonction propre  $\Phi_{00}$  du guide.

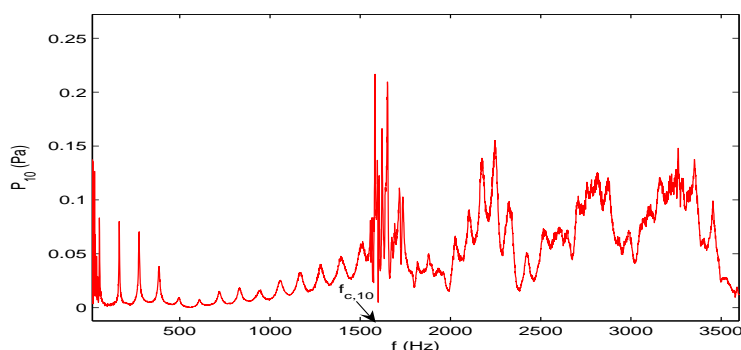


Figure 3.25 – Projection des mesures des 5 micros sur la fonction propre  $\Phi_{10}$  du guide.

Il est également intéressant d'observer à l'aide de la figure 3.29, les premières fréquences de résonance du mode 01 dans le plan complexe obtenues avec la théorie modale et par la mesure. La partie imaginaire des résonances obtenues expérimentalement est plus importante que dans le cas de la théorie modale mais elle représente seulement quelques millièmes de la partie réelle. Ainsi, il est difficile d'être très précis expérimentalement car nous avons la présence d'autres pertes qui viennent s'ajouter au rayonnement. Mais il est important de noter que l'évolution des parties imaginaires est tout de même comparable pour les deux méthodes.

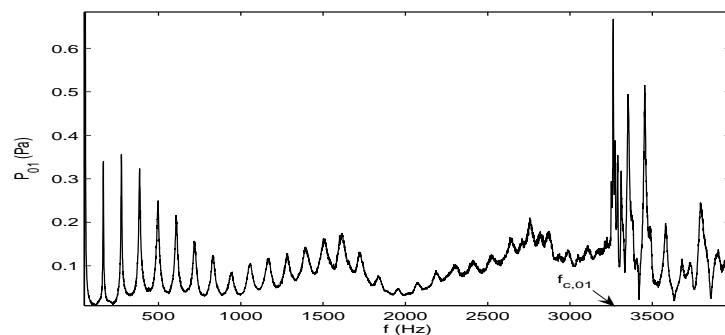


Figure 3.26 – Projection des mesures des 5 micros sur la fonction propre  $\Phi_{01}$  du guide.

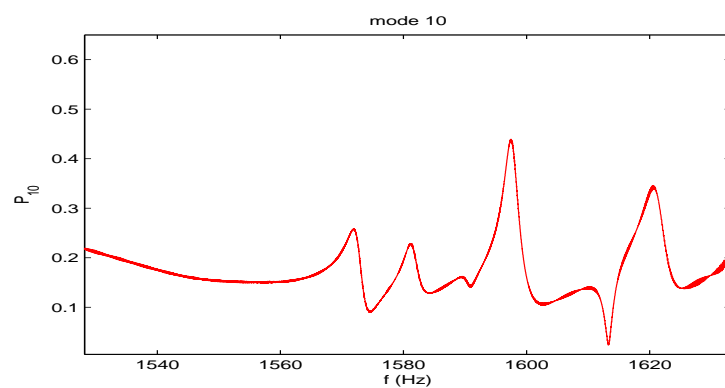


Figure 3.27 – Projection des mesures des 5 micros  $\mu$  sur la fonction propre  $\Phi_{10}$  du guide.

j	Mesures	théorie modale
0	1572	1576
1	1581	1584,1
2	1598	1600,04
3	1621	1623,7

Table 3.4 – Parties réelles des premières résonances du mode 10 obtenues dans le cas expérimental avec écran et dans le cas de la théorie modale avec 1HM.

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.3 Cas du résonateur cylindrique

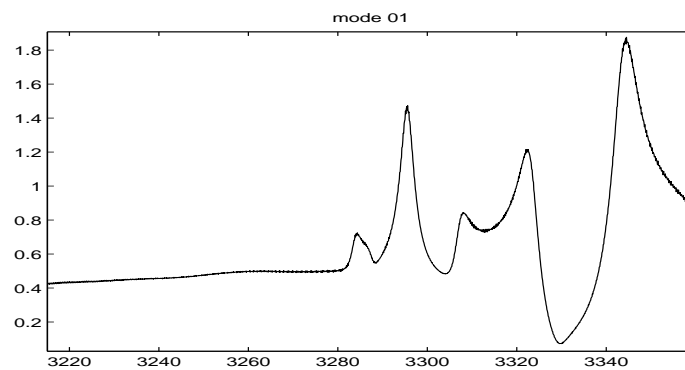


Figure 3.28 – Projection des mesures des 5 micros  $\mu$  sur la fonction propre  $\Phi_{01}$  du guide.

j	Mesures	théorie modale
0	3284	3283,7
1	3295	3291,5
2	3308	3302,5
3	3321	3318,7
4	3344	3338

Table 3.5 – Parties réelles des premières résonances du mode 01 obtenues dans le cas expérimental avec écran et dans le cas de la théorie modale avec 1HM.

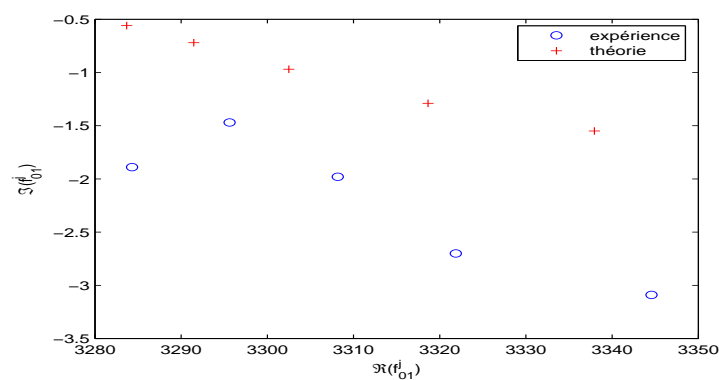


Figure 3.29 – Comparaison entre les premières fréquences de résonances du mode 01 obtenue avec la théorie modale et avec la projection des mesures des 5 micros  $\mu$  sur la fonction propre  $\Phi_{01}$  du guide.

### 3.4 Cas du pavillon de Bessel

Le pavillon réalisé expérimentalement (voir figure 3.30) a les mêmes dimensions que celui utilisé dans la méthode BEM (longueur  $0,5m$ , rayon d'entrée  $0,064m$ , rayon de sortie  $0,25m$  et paramètre de forme  $\nu = 0,5$ ) dont l'équation du rayon  $R$  en fonction de la distance à l'origine  $x$  s'écrit  $R(x) = 0,0468/(0,535 - x)^{0,5}$ . Le montage expérimental peut être observé sur les figures 3.31 et 3.32.

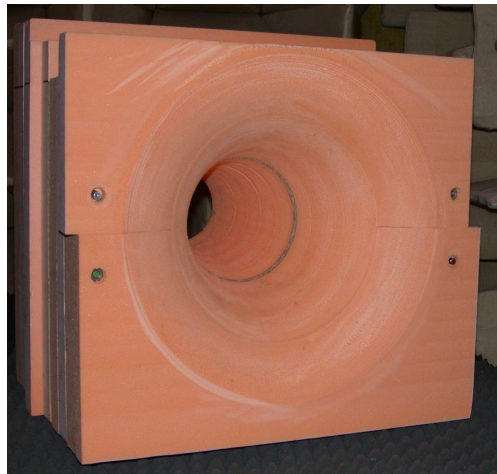


Figure 3.30 – Pavillon de Bessel réalisé expérimentalement de longueur  $0,5m$ , de rayon d'entrée  $0,064m$ , de rayon de sortie  $0,25m$  et de paramètre de forme  $\nu = 0,5$ .

Sur la figure 3.33, nous observons la réponse du pavillon de Bessel seul pour une excitation en bruit blanc (le bouchon avec les 5 micros est alors positionné à l'entrée du pavillon). Nous constatons que celui-ci peut alors être apparenté à un filtre passe-haut avec une fréquence de coupure vers  $219Hz$ . Ainsi, ce pavillon va fortement augmenter le rayonnement des résonances ayant des fréquences supérieures à  $219Hz$ . Nous pouvons observer sur la figure 3.34 l'impédance obtenue à l'entrée du pavillon avec la méthode hybride et avec le logiciel Tubelab. Ce logiciel est basé sur un système d'impédance ramenée avec une approximation onde plane, une correction de longueur est utilisée pour décrire l'effet du rayonnement. Nous nous apercevons alors que nous obtenons une fréquence de coupure du pavillon qui est comparable à celle obtenue expérimentalement. Notons également que nous observons plus d'amortissement avec notre méthode hybride qu'avec Tubelab, ce qui peut s'expliquer par une prise en compte plus réaliste du rayonnement dans notre méthode (ce n'est pas une simple correction de longueur comme dans Tubelab). Précisons ici que les grandeurs représentées sur les figures 3.33 et 3.34 sont différentes (fonction de transfert entre l'entrée du résonateur et la source pour les mesures et entre l'entrée et la sortie du résonateur pour la théorie). Mais dans un premier temps cela n'a pas d'importance car nous comparons seulement l'allure de la résonance.

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.4 Cas du pavillon de Bessel

---

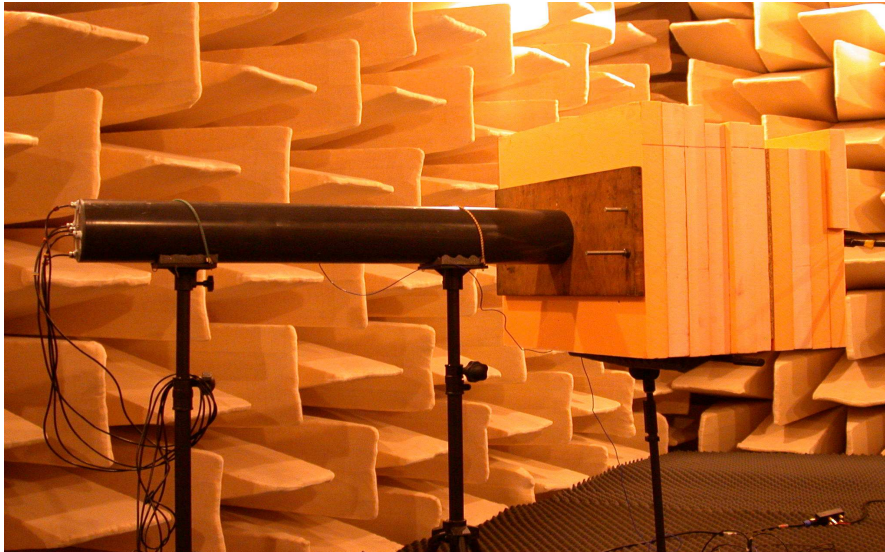


Figure 3.31 – Montage expérimental avec le pavillon de Bessel.

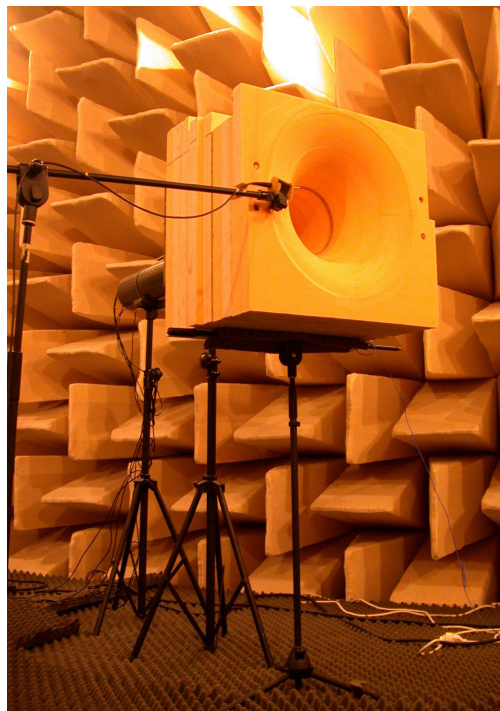


Figure 3.32 – Montage expérimental avec le pavillon de Bessel.

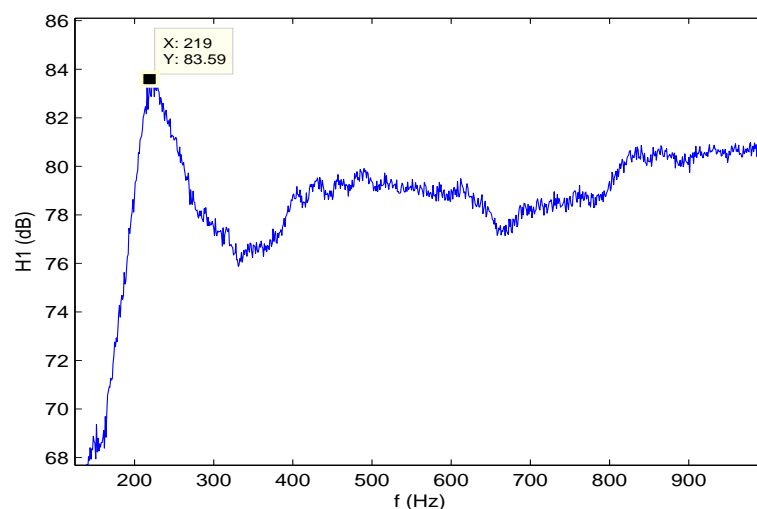


Figure 3.33 – Fonction de transfert  $H_1$  du pavillon de Bessel de 0,5m seul, pour une excitation en bruit blanc.

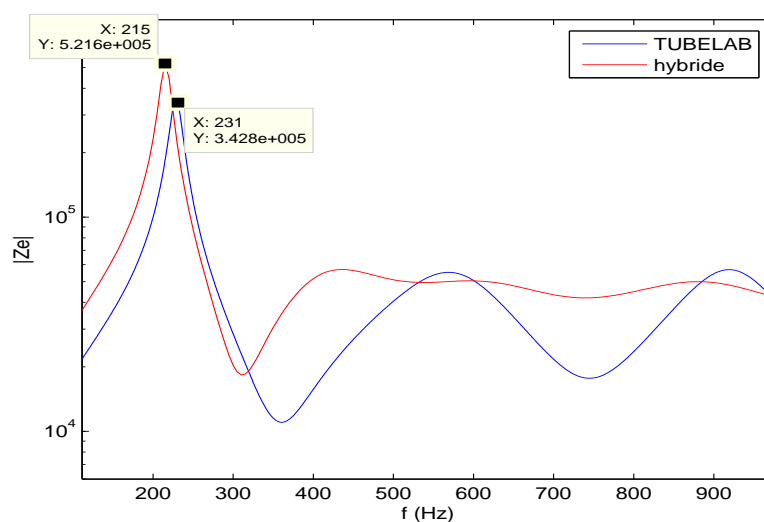


Figure 3.34 – Impédance obtenue à l'entrée du pavillon de Bessel de 0,5m seul avec la méthode hybride et Tubelab.

Nous retrouvons bien ce comportement de filtre passe haut sur la fonction de transfert  $H_1$  représentée sur la figure 3.35. En effet, après 200 Hz, les résonances du système *cylindre+pavillon* paraissent beaucoup plus amorties. Comme précédemment, nous observons

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.4 Cas du pavillon de Bessel

un bon accord entre les mesures de  $H_1$  présentées sur la figure 3.35 et l'impédance à l'entrée du système obtenue avec la méthode hybride et avec le logiciel Tubelab présentée sur la figure 3.36. Principalement jusqu'à 300 Hz car après le système devient trop amorti et il est alors difficile de faire une comparaison précise avec les mesures. Remarquons cependant que qualitativement il semble que les mesures présentent un amortissement plus important, ce qui se rapproche du résultat obtenu avec la méthode hybride.

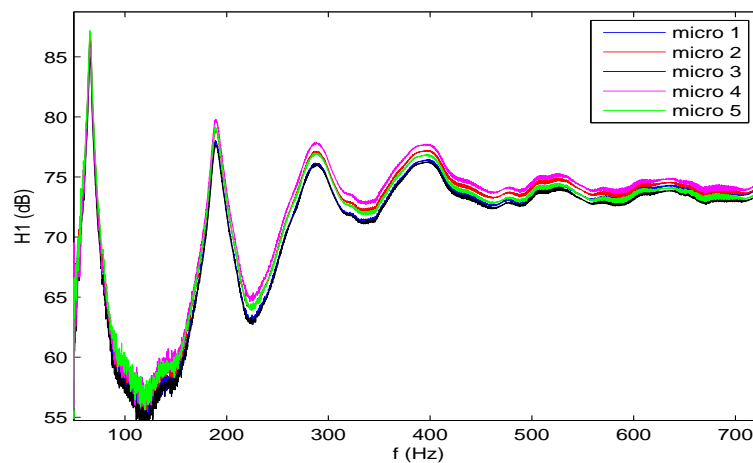


Figure 3.35 – Fonction de transfert  $H_1$  entre les micros à l'entrée du cylindre de 1m avec un pavillon de Bessel de 0,5m et le micro de référence pour une excitation en bruit blanc.

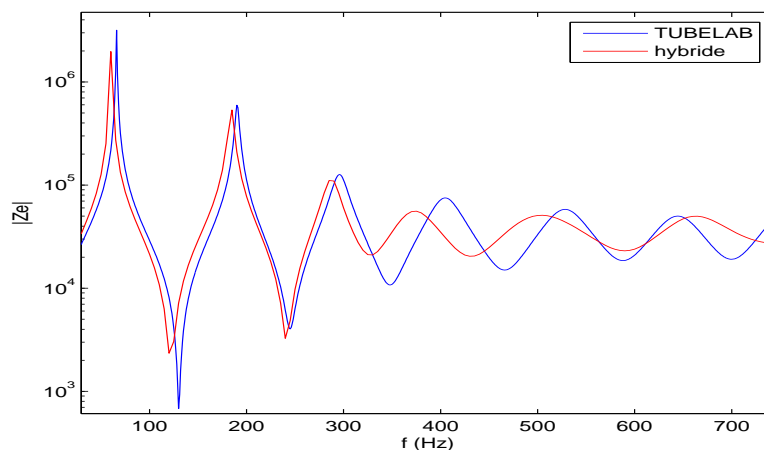


Figure 3.36 – Impédance obtenue à l'entrée du cylindre de 1m avec un pavillon de Bessel de 0,5m avec la méthode hybride et Tubelab.



Nous avons représenté sur la figure 3.37 les valeurs des premières fréquences de résonance du système *tube 1m + pavillon de Bessel* obtenues avec la méthode hybride et la méthode entièrement BEM comparées aux mesures. Les valeurs expérimentales sont obtenues avec la méthode du cercle de Kennely en l'appliquant à chaque résonance indépendamment des autres. Mais comme nous pouvons le voir sur la figure 3.35, le système *cylindre+pavillon* devient rapidement très amorti ce qui complique l'identification des résonances, nous sommes donc limités aux fréquences inférieures à 500 Hz. Cependant, nous observons une bonne similarité entre les différentes méthodes sauf pour la partie imaginaire de la dernière résonance obtenue avec la méthode hybride. Comme précisé dans le chapitre précédent, cela peut s'expliquer par un maillage trop grossier de la surface de raccord entre le pavillon et le cylindre qui nous semble déterminant pour avoir une bonne description du rayonnement.

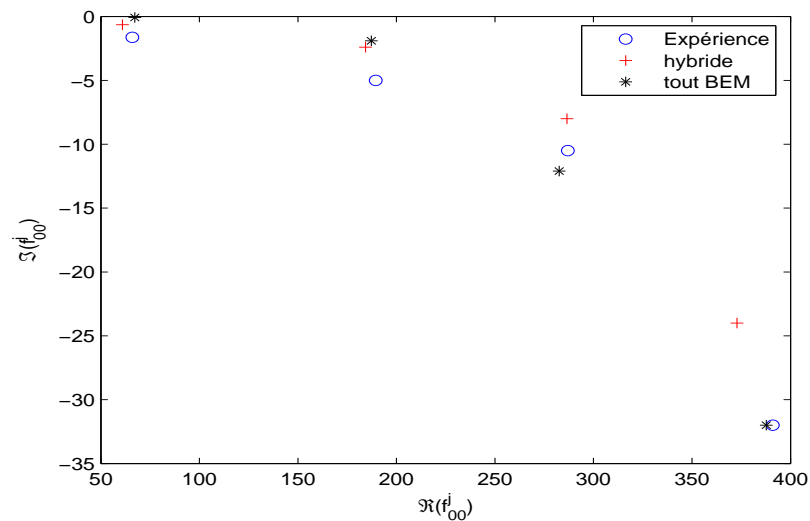


Figure 3.37 – Fréquences de résonance du cylindre de 1m avec un pavillon de Bessel de 0,5m obtenues avec la méthode hybride (+), tout BEM (\*) et modale (o).

Sur la figure 3.38 nous observons la projection de la fonction de transfert  $H_1$  sur le mode 01 du cylindre. Nous voyons alors apparaître les premiers pics de résonance du mode 01. Nous observons alors que les valeurs de ces pics de résonance sont en accord avec ceux de l'impédance d'entrée obtenue avec la méthode hybride tracée sur la figure 3.39 (ces résultats sont reportés dans la table 3.6). Cela est très intéressant de voir que malgré les approximations faites lors de nos mesures et malgré le maillage grossier utilisé, nous arrivons quand même à obtenir des résultats très satisfaisant pour les fréquences des pics de résonance d'un mode non plan à des fréquences élevées. Des résultats beaucoup plus précis sont alors imaginables, notamment en recalant la sensibilité des différents micros ou en tenant compte de l'influence de la salle.

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.4 Cas du pavillon de Bessel

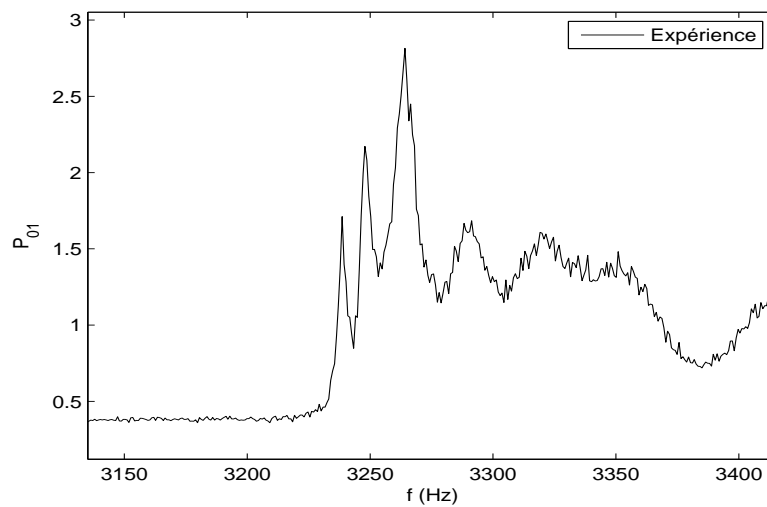


Figure 3.38 – Projection des mesures des 5 micros à l'entrée du cylindre de  $1m$  avec un pavillon de Bessel de  $0,5m$  sur la fonction propre  $\Phi_{01}$  du cylindre de rayon  $b = 0,064m$ .

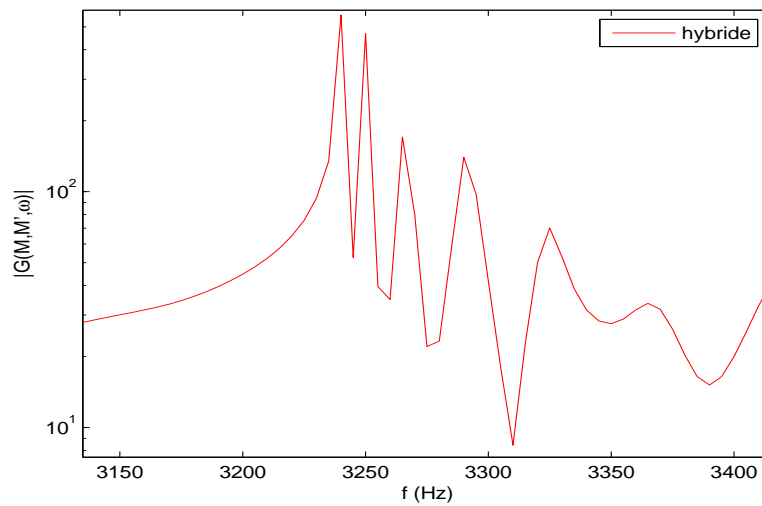


Figure 3.39 – Fonction de Green du cylindre de  $1m$  avec un pavillon de Bessel de  $0,5m$  obtenue avec la méthode hybride.

j	Expérience	Hybride
0	3239	3240
1	3248	3250
2	3264	3265
3	3290	3290
4	3321	3325
5	3352	3365

Table 3.6 – Valeurs des  $j$  premières parties réelles des fréquences de résonance du mode 01 obtenues expérimentalement et avec la méthode hybride dans le cas d'un système *tube 1m + pavillon de Bessel*.

### 3.5 Cas du pavillon conique

Comme dans le cas du pavillon de Bessel, le pavillon conique (voir figure 3.40) a les mêmes dimensions que celles présentées dans le chapitre précédent ( $r_{initial} = 0,064m$  et  $r_{final} = 0,25m$ , d'équation  $R(x) = 0,372x + 0.064$ ).

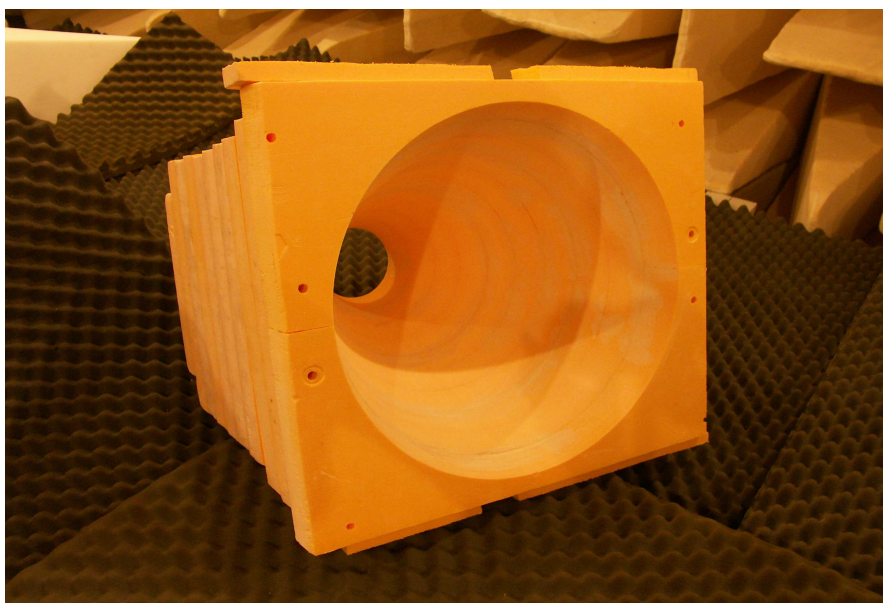


Figure 3.40 – Pavillon conique ( $r_{initial} = 0,064m$  et  $r_{final} = 0,25m$ ).

Commençons par observer sur la figure 3.41, la fonction de transfert  $H_1$  entre la pression mesurée sur les micros situés sur le bouchon à l'entrée du pavillon seul et la pression mesurée par le micro de référence. Similairement au pavillon de Bessel, le pavillon conique possède lui aussi une fréquence de coupure, qui est située vers 199 Hz. Nous retrouvons

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.5 Cas du pavillon conique

---

bien sur la figure 3.42 ce comportement sur l'impédance d'entrée du pavillon calculée avec la méthode hybride et avec le logiciel Tubelab.

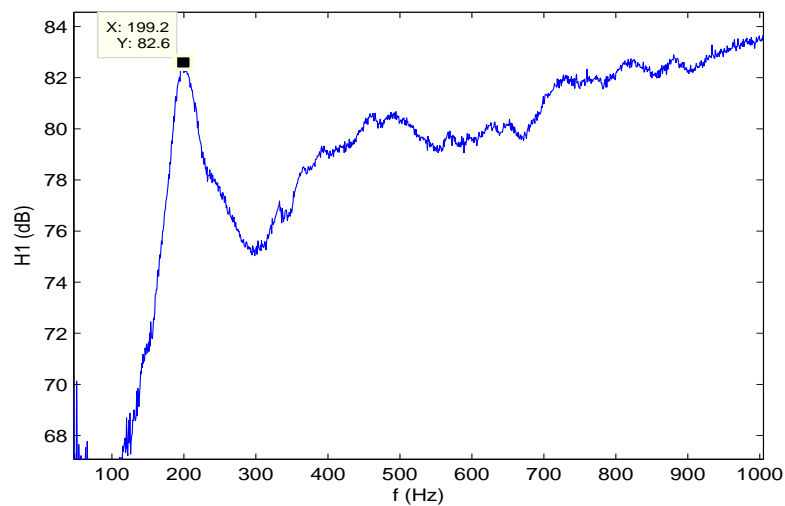


Figure 3.41 – Fonction de transfert  $H_1$  du pavillon conique de 0,5m seul.

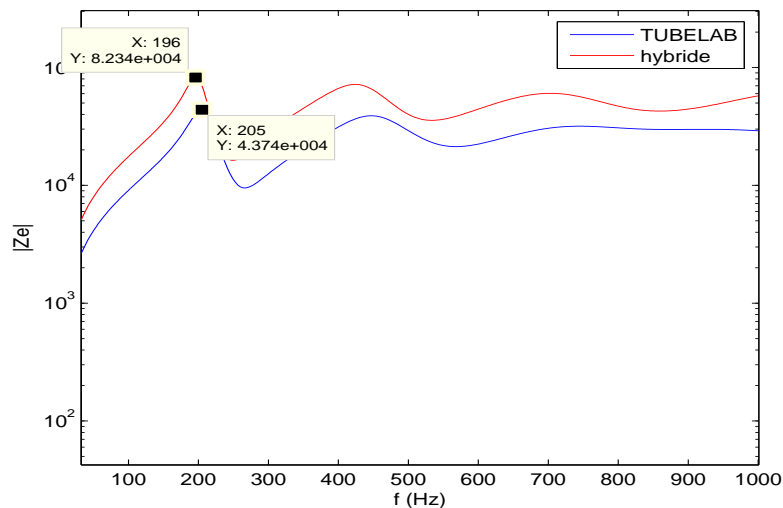


Figure 3.42 – Impédance à l'entrée du pavillon conique de 0,5m seul, obtenue avec la méthode hybride et Tubelab.

Nous observons bien sur la figure 3.43 une augmentation des pertes du système *cylindre+pavillon conique* au delà de cette fréquence. Remarquons que nous observons également le même comportement sur l'impédance d'entrée tracée sur la figure 3.44 avec la méthode hybride et Tubelab (comme dans le cas du pavillon de Bessel, l'amortissement étant très important il est difficile de faire une bonne comparaison de nos résultats théoriques avec les mesures en hautes fréquences).

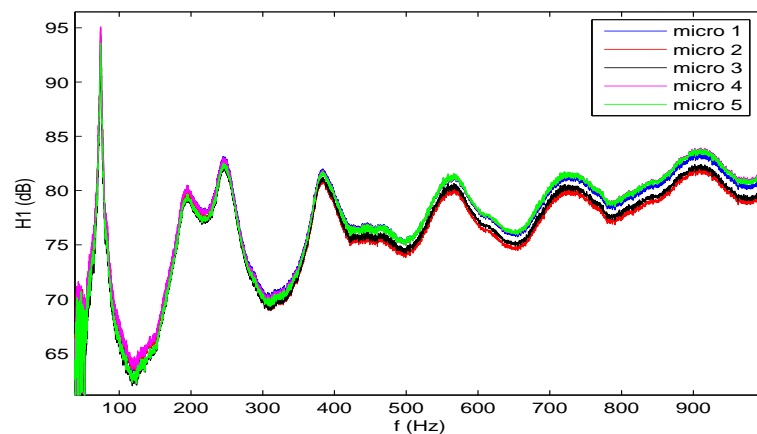


Figure 3.43 – Fonction de transfert du cylindre de  $1m$  avec un pavillon conique de  $0,5m$  pour une excitation en bruit blanc.

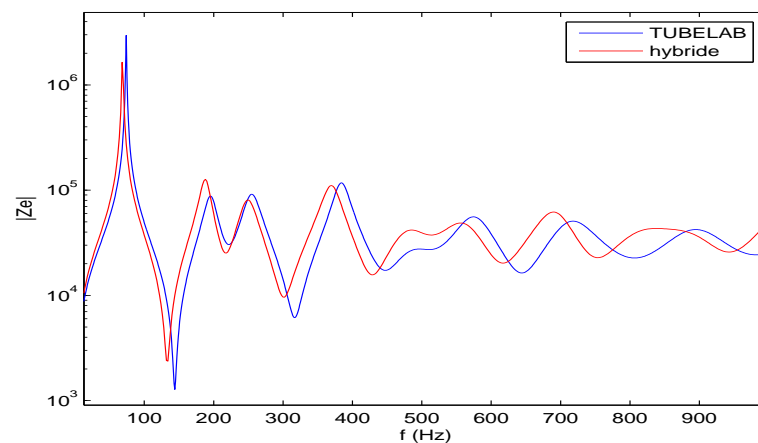


Figure 3.44 – Impédance à l'entrée du cylindre de  $1m$  avec un pavillon conique de  $0,5m$ , obtenue avec la méthode hybride et Tubelab.

## Chapitre 3 : Mesure des fréquences de résonance dans plusieurs configurations expérimentales

### 3.6 Bilan du troisième chapitre

Sur la figure 3.45, nous pouvons voir la comparaison des premières fréquences de résonance du système *tube 1m + pavillon conique* obtenues expérimentalement, avec la méthode hybride et avec la méthode entièrement BEM. Comme dans le cas du pavillon de Bessel, les différentes valeurs sont très proches pour les trois méthodes. Nous observons seulement une différence sur la partie imaginaire de la dernière résonance obtenue avec la méthode entièrement BEM, mais cela est sans doute dû aux limites du maillage.

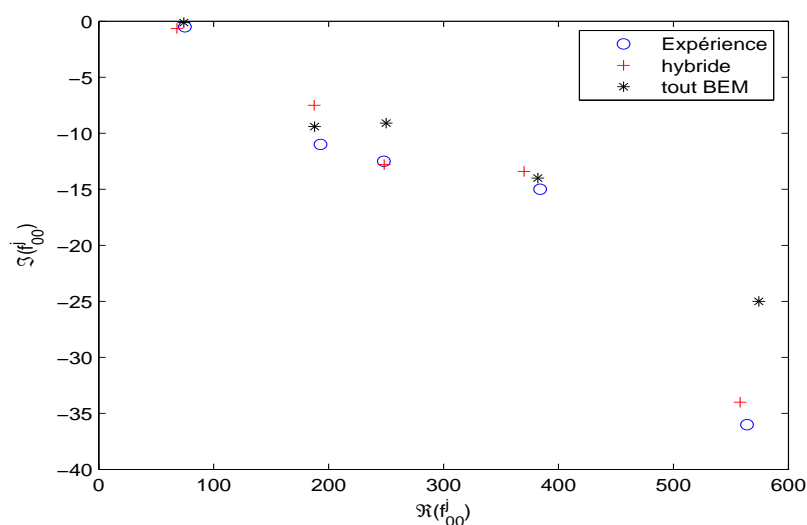


Figure 3.45 – Fréquences de résonance du système *cylindre de 1m + pavillon conique de 0,5m* pour le pavillon lissé et avec la méthode BEM (maillage T2B8) et hybride.

### 3.6 Bilan du troisième chapitre

Dans ce chapitre nous avons pu proposer une première validation de quelques résultats significatifs obtenus avec notre méthode numérique. Malgré de nombreuses approximations et une mauvaise précision de nos micros, nous avons tout de même pu valider notre montage expérimental en comparant les mesures obtenues dans le cas du cylindre avec les résultats obtenus théoriquement. Les mesures des résonances du système avec pavillon se rapprochent de celles obtenus avec notre code d'éléments finis de frontières. Il en est de même pour les premières fréquences de résonance des premiers modes non plans ce qui est très encourageant pour la suite. Mais un manque de temps ne nous a pas permis de refaire des mesures, notamment en étalonnant les micros plus précisément (par exemple en les étalonnant sur les valeurs du mode plan à leurs emplacement sur le bouchon) et en tenant compte de la réponse de la salle pour toutes les mesures.

# Conclusion

L'objectif principal de cette thèse était de développer un outil numérique nous permettant d'étudier le couplage entre deux milieux et notamment entre le fluide d'un milieu interne et le fluide d'un milieu externe. Nous avons choisi de l'appliquer aux résonateurs de longueur finie, très utilisés en acoustique musicale, afin d'obtenir une idée de la relation existant entre leur géométrie et leur rayonnement. Pour cela, nous nous sommes intéressés à l'étude des fréquences de résonance complexes correspondant aux singularités du système couplé avec le milieu extérieur. Ces fréquences sont très intéressantes, dans notre cas leur partie imaginaire est directement reliée aux pertes d'énergie par rayonnement car ce sont les seules pertes considérées. Ce travail est basé sur trois grands axes : une étude analytique à l'aide d'une théorie modale, le développement d'une méthode numérique basée sur les éléments finis de frontière et une confrontation expérimentale de nos résultats.

Premièrement, nous nous sommes attachés à l'étude de résonateurs cylindriques de longueur finie débouchant dans un écran infini, afin d'avoir un cas de référence pour notre étude. Pour cela, nous avons développé une méthode basée sur la décomposition modale de la pression, d'une représentation de Green de la pression ainsi qu'une méthode d'impédance ramenée. Nous avons ainsi obtenue une écriture générale du problème avec la présence d'un point source à l'intérieur du résonateur et d'une condition de rayonnement quelconque en sortie. Avec cette formulation du problème, les fréquences de résonance recherchées correspondent alors aux pôles de la fonction de Green du système. Nous avons choisi d'exprimer le couplage avec le milieu extérieur par une impédance de rayonnement multimodale basée sur la formulation développée par Zorumski [8]. Mais cette dernière contenant des intégrales divergentes pour des fréquences complexes, nous avons dû introduire une nouvelle formulation de l'impédance de rayonnement qui est alors valide pour toutes les fréquences. Ceci constitue un des principaux résultats présentés dans le premier chapitre. Nous avons alors pu comparer les résultats obtenus avec cette nouvelle formulation du problème à ceux obtenus avec la condition classique de rayonnement d'un piston plan introduit par Rayleigh [4] et avec l'approximation du rayonnement par une correction de longueur introduite par Norris [6] notamment utilisé dans le logiciel TUBELAB. Ceci nous a permis de valider notre formulation et d'en dégager les avantages. Ces derniers résident principalement dans le fait de ne pas être limité au seul mode plan. Nous avons donc pu étudier les résonances des modes non plans et ainsi que l'influence des modes d'ordres supérieurs sur le rayonnement du mode plan, ce qui n'est pas accessible avec une simple correction de longueur. Nous avons notamment vu qu'en dessous de la fréquence de coupure du premier mode non plan,

## Conclusion

---

un seul mode d'ordre supérieur est suffisant pour bien décrire le couplage du mode plan avec le milieu extérieur. Un autre résultat intéressant de cette première partie porte sur l'influence de la masse volumique du milieu extérieur sur le couplage avec le milieu intérieur. En effet, nous avons vu que le rayonnement des fréquences de résonance des premiers modes passe par un maximum pour une masse volumique du fluide externe légèrement différente de celle du fluide interne. De plus, la valeur de la masse volumique du fluide externe permettant d'obtenir le maximum de rayonnement évolue avec la fréquence. Le cas test de notre étude étant obtenu, nous avons ensuite pu nous intéresser à des géométries de résonateurs plus complexes que le cylindre débouchant dans un écran infini.

Pour cela, nous avons développé, dans un second temps, une méthode d'éléments finis de frontière directe dans un code programmé en Fortran. Un travail important a été de développer une version parallélisée en OPEN MP du code afin d'accélérer le temps de calcul des fréquences résonances qui ne sont plus définies comme étant les pôles de la fonction de Green mais comme les zéros du déterminant de notre problème (mais qui correspondent toujours aux singularités du système). Avec une telle méthode, nous devons fermer le maillage de notre système et nous ne pouvons bien sûr pas mailler un écran infini. Nous avons alors choisi d'insérer notre système dans une boîte dont la taille de la face avant est défini par la norme CEI. Mais la présence de cette boîte entraîne l'apparition de fréquences propres irrégulières liées au problème intérieur associé. La partie imaginaire de ces fréquences est nulle, mais ce n'est plus le cas si la précision de notre calcul est mauvaise (due notamment à la taille des éléments). Cependant, nous pouvons nous servir de cette propriété pour avoir une information sur la précision des résultats. Un premier travail a donc été d'étudier l'influence de la taille de cette boîte ainsi que la taille des éléments. Pour cela nous avons comparé les résonances obtenues pour un cylindre de longueur finie avec la méthode BEM (avec différentes tailles de boîtes et d'éléments) avec les résultats obtenus avec la théorie modale développée au premier chapitre (avec un écran infini). Cela nous a permis de conclure qu'une boîte de taille CEI/3 est suffisante pour bien décrire l'effet du baffle (sauf aux basses fréquences). Nous avons également observé que pour avoir une bonne précision des résultats nous devons avoir un maillage très fin sur le cylindre (environ 21 éléments par longueur d'onde) alors que celui de la boîte peut être beaucoup plus grossier (seulement 3 éléments par longueur d'onde).

Nous avons donc pu par la suite nous intéresser à des résonateurs plus complexes. Pour cela, nous avons pris l'exemple des pavillons, souvent utilisés dans la facture des instruments à vent. Des premiers résultats ont été obtenus dans le cas des pavillons de Bessel et du pavillon conique. Ces derniers sont en bon accord avec ceux existant dans la littérature, notamment sur le lien qui existe entre la courbure d'un pavillon de Bessel et le rayonnement du système *cylindre+pavillon*.

Le problème principal de cette méthode repose sur le fait qu'avec le grand nombre d'éléments nécessaires pour avoir une bonne précision des résultats, le temps de calcul des résonances devient vite important.

Afin de réduire le coût du calcul, nous avons alors choisi de développer une méthode hybride entre la théorie modale analytique et la méthode d'éléments finis de frontière. Le principe repose sur le fait de décrire une partie du résonateur dont la géométrie est suffisa-



ment simple pour être étudié analytiquement (par exemple un cylindre) afin de profiter de la rapidité de cette méthode et de décrire l'autre partie du résonateur dont la géométrie est plus complexe avec une méthode d'éléments finis de frontière. Pour cela, nous avons rajouté dans notre code le calcul de l'impédance à l'entrée de la partie numérique projetée sur les modes propres du conduit analytique. C'est alors cette impédance que nous introduisons comme nouvelle condition de rayonnement dans la méthode d'impédance ramenée. Cette méthode permet d'obtenir un gain de temps considérable par rapport à la méthode entièrement numérique lorsque nous avons une grande partie du résonateur cylindrique (ou avec une géométrie simple). C'est notamment le cas dans la plupart des instruments à vent ce qui constitue donc une application importante de notre méthode. Nous avons pu obtenir une validation de ce modèle hybride, dans le cas du tuyau cylindrique avec et sans pavillon, pour le mode plan ainsi que pour les premières résonances des deux premiers modes non plans. Cela met en avant un des principaux intérêts de notre méthode par rapport à un logiciel tel que TUBELAB où l'étude du système est limitée aux fréquences où seul le mode plan est propagatif.

Cette étude se termine par la confrontation expérimentale de quelques résultats théoriques. Pour cela nous avons fait les mesures des résonances dans le cas d'un cylindre avec et sans écran, ainsi que dans le cas de deux systèmes *cylindre+pavillon* (pour un pavillon de Bessel et un pavillon conique). Les premières mesures obtenues (bien qu'étant des résultats préliminaires au vu des différentes approximations faites) sont comparables aux résultats théoriques, notamment dans le cas des résonances du mode plan. Le placement de nos micros, assimilable à un système d'antennerie, nous permet d'étudier séparément les différents modes du système. Des premiers résultats ont ainsi pu être obtenus pour les modes non plans.

Le code basé sur la méthode hybride développée dans cette thèse permet d'étudier la relation existant entre la géométrie et le rayonnement d'un résonateur d'une manière satisfaisante. Cependant, de nombreuses améliorations peuvent encore y être apportées.

Une étude précise sur l'influence du maillage de la surface de raccord, entre la partie analytique et la partie numérique, nous semble primordiale pour le développement de cette méthode. En effet, c'est sur cette surface que nous effectuons la projection de la matrice contenant le comportement de la partie BEM sur les modes propres de la partie analytique. Il serait donc intéressant d'étudier précisément le lien existant entre le maillage de cette surface et la condition de normalisation des modes utilisée qui nous permet de faire le lien entre la formulation BEM et la théorie modale.

D'un point de vue expérimental, de nombreuses améliorations sont aussi possibles. Un des problèmes majeurs de notre expérience provient du mauvais étalonnage des micros (sûrement dû à leur mauvaise qualité), pour y remédier nous pourrions choisir d'utiliser les mesures du mode plan comme référence pour effectuer l'étalonnage. Afin d'obtenir des résultats plus précis, il serait aussi intéressant de prendre en compte la réponse de la salle et d'autres types de pertes, notamment celles dues aux vibrations mécaniques de notre système.

Une des perspectives principales de notre travail, serait de faire le raccord de la partie

## Conclusion

---

dissipative décrite par la méthode d'éléments finis avec une autre partie passive que le tuyau cylindrique (géométrie réelle d'instruments à vent avec trous latéraux, enceinte, salle, ...) afin d'élargir les applications de notre code.

## Annexe A

# Méthode des variables séparées

L'équation de propagation hors source s'écrit :

$$(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})p(M, t) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Nous considérons les parois  $\Sigma$  de notre cylindre rigides et parfaitement réfléchissantes (condition de Neumann), nous avons ainsi :

$$\frac{\partial p(M)}{\partial n} = 0, \quad \forall M \in \Sigma.$$

Avec une telle géométrie, il est pratique de travailler en coordonnées cylindriques, nous avons alors :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Les solutions de l'équation (A.1) sont recherchées sous forme de solutions à variables séparées (méthode présentée notamment dans [13] ou [14]) :

$$p(r, \theta, z, t) = \rho c^2 \psi(r) \Theta(\theta) P(z) T(t). \quad (\text{A.2})$$

En reportant (A.2) dans (A.1) et en divisant par  $p(M, t)$  nous obtenons  $\forall (r, \theta, z) \in \Omega$  et  $\forall t$  :

$$\frac{1}{\psi(r)} \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r \psi(r)} \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + \frac{1}{\Theta(\theta) r^2} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{P(z)} \frac{\partial^2 P(z)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2 T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}. \quad (\text{A.3})$$

Pour que le membre de droite de l'équation (A.3) dépendant de la seule variable de temps  $t$  soit égal au membre de gauche qui dépend que des coordonnées spatiales, il est nécessaire que chaque membre soit égal à une constante notée  $-k^2$ . Ainsi, en posant  $k^2 c^2 = \omega^2$ , nous avons :

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0, \quad \forall t. \quad (\text{A.4})$$

## Chapitre A : Méthode des variables séparées

---

La solution de cette équation est notée

$$T(t) = Ae^{-i\omega t}. \quad (\text{A.5})$$

Ainsi l'équation (A.3) devient :

$$\frac{1}{\psi(r)} \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r\psi(r)} \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + \frac{1}{\Theta(\theta)r^2} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{P(z)} \frac{\partial^2 P(z)}{\partial z^2} = -k^2,$$

soit

$$-\left(\frac{1}{\psi(r)} \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r\psi(r)} \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + \frac{1}{P(z)} \frac{\partial^2 P(z)}{\partial z^2} + k^2\right) = \frac{1}{\Theta(\theta)r^2} \frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2}.$$

Avec le même raisonnement que précédemment, le membre de gauche et celui de droite doivent être égaux à une constante de séparation notée  $-m^2$ , en multipliant par  $r^2$  nous avons :

$$\frac{\partial^2 \Theta(\theta)}{\partial \theta^2} + m^2 \Theta(\theta) = 0, \quad \forall \theta,$$

ainsi :

$$\Theta(\theta) = B_m e^{im\theta}, \quad (\text{A.6})$$

avec  $m = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty$  car d'après la géométrie cylindrique de notre problème,  $\Theta(\theta)$  doit être  $2\pi$  périodique.

Ainsi, avec la même méthode, l'équation (A.3) s'écrit :

$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) \psi(r) = 0, \quad \forall r \in \Omega.$$

En posant  $s = kr$ , puis en divisant par  $k^2$  nous arrivons à :

$$\frac{d^2 \psi(s)}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d\psi(s)}{ds} + \left(1 - \frac{m^2}{s^2}\right) \psi(s) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Cette équation est une équation de Bessel. Comme le champ doit être fini en  $r = 0$ , les solutions ne font intervenir que des fonctions de Bessel de première espèce d'ordre  $m$  notée  $J_m(s)$ , car celles de secondes espèces sont infinies en  $r = 0$  pour tout  $m$ .

La condition de Neumann sur les parois est satisfaite si :

$$J'_m(kb) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Pour chaque  $m$  il existe, d'après [35], une séquence dénombrable  $\lambda_{mn}$ , où  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ , telle que l'égalité (A.8) est satisfaite. Cela donne une séquence dénombrable de fonctions :

$$\psi_{mn}(r) = \frac{J_m(\lambda_{mn}r)}{N_{mn}}, \quad (\text{A.9})$$

où les  $\lambda_{mn}$  sont solutions de  $J'_m(\lambda_{mn}b) = 0$ , avec  $\lambda_{mn} = \gamma_{mn}/b$ . Les  $\gamma_{mn}$  sont les  $n+1^{eme}$  zéros de la dérivée première de la fonction de Bessel  $J_m$ .

D'après (A.6) et (A.9), le dépendance des modes propres du conduit en  $(r, \theta)$  (modes transverses) est :

$$\boxed{\phi_{mn}(r, \theta) = \frac{J_m(\lambda_{mn}r)}{N_{mn}} e^{im\theta}}. \quad (A.10)$$

Pour déterminer  $N_{mn}$ , nous choisissons de normaliser les modes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_S \phi_{mn} \phi_{m'n'}^* dS &= \int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-im'\theta} d\theta \int_0^b r \psi_{mn}(r) \psi_{m'n'}(r) dr \\ &= S \delta_{mm'} \delta_{nn}, \end{aligned} \quad (A.11)$$

où  $S$  est la section droite du cylindre. De plus nous avons :

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-im'\theta} d\theta = 2\pi \delta_{mm'}.$$

Ainsi d'après (A.9) et (A.11), nous avons :

$$N_{mn}^2 = 2\pi S^{-1} \int_0^b r J_m^2(\lambda_{mn}r) dr.$$

Utilisons ici l'intégrale de Lommel, qui est définie d'après [20] telle que :

$$\int_0^u J_m^2(au) du = \frac{1}{2} u^2 ([J'_m(au)]^2 + (1 - \frac{m^2}{a^2 u^2}) [J_m(au)]^2).$$

En utilisant la condition de Neumann sur les parois ( $J'_m(\lambda_{mn}b) = 0$ ), nous arrivons à :

$$N_{mn}^2 = (1 - \frac{m^2}{\lambda_{mn}^2 b^2}) J_m^2(\lambda_{mn}b).$$

Finalement, nous définissons la norme  $N_{mn}$  telle que :

$$N_{mn} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\lambda_{mn}^2 b^2}} J_m(\lambda_{mn}b). \quad (A.12)$$

Il nous reste maintenant à définir la dépendance en  $z$  de l'équation A.2. Avec la même méthode de séparation de variables que précédemment, nous pouvons écrire pour une constante de séparation notée  $-k_{mn}^2$  :

$$\frac{\partial^2 P_{mn}(z)}{\partial z^2} + k_{mn}^2 P_{mn}(z) = 0, \quad \forall z,$$

les solutions peuvent s'écrire :

$$P_{mn}(z) = C_{mn} e^{-ik_{mn}z} + D_{mn} e^{ik_{mn}z}. \quad (A.13)$$

## Chapitre A : Méthode des variables séparées

---

Ainsi, d'après A.6, A.10 et A.13, les solutions de A.1 peuvent s'écrire (en omettant la dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ ) :

$$p(r, \theta, z) = \rho c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{mn} e^{-ik_{mn}z} + D_{mn} e^{ik_{mn}z}] \Phi_{mn}(r, \theta). \quad (\text{A.14})$$

Des études telles que [9] ou [10] montrent que nous observons une convergence de la solution (sauf en  $r = r'$ ,  $\theta = \theta'$  et  $z = z'$ ) et que nous pouvons tronquer la double sommation à un nombre fini de termes que nous définissons avec  $M_m$ =nombre de  $m$  (indice azimuthal du mode) et  $N_n$ = nombre de  $n$  (indice radial du mode).  $\phi_{mn}(r, \theta) = \psi_{mn}(r) e^{im\theta}$  est le profil de la pression sur le plan  $(r, \theta)$  pour le mode  $mn$  (les  $\phi_{mn}(r, \theta)$  sont aussi appelés modes de conduit) et  $P_{mn}(z)$  est le profil axial de la pression du mode  $mn$ .

D'après les résultats précédents,  $k_{mn}^2 = k^2 - \lambda_{mn}^2$ . De ce fait si  $k^2 > \lambda_{mn}^2$ , le mode  $mn$  est propagatif (transporte de l'énergie) et nous avons :

$$k_{mn} = \sqrt{k^2 - \lambda_{mn}^2},$$

et si  $k^2 < \lambda_{mn}^2$ , le mode  $mn$  est évanescent (ne transporte pas d'énergie), nous avons alors :

$$k_{mn} = \pm i \sqrt{\lambda_{mn}^2 - k^2}.$$

## Annexe B

# Méthode d'impédance ramenée

### B.1 Condition de Neumann ou de Dirichlet en sortie

Le profil axial de la pression peut s'exprimer de la manière suivante :

$$P(z) = C_{mn}e^{-ik_{mn}z} + D_{mn}e^{ik_{mn}z}. \quad (\text{B.1})$$

Si nous choisissons une condition de Neumann à l'entrée du cylindre (en  $z = -L$ ) et une condition de Dirichlet à la sortie (en  $z = 0$ ), nous pouvons alors calculer facilement les fréquences de résonances de notre système.

Dans ce cas l'équation (B.1) peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$P(z) = Ce^{-i\alpha_j z} + De^{i\alpha_j z}, \quad (\text{B.2})$$

avec  $\alpha_j$  le nombre d'onde de résonance du  $j^{me}$  mode longitudinal. La condition de Neumann à l'entrée ( $\partial_z p(-L) = 0$ ) et de Dirichlet à la sortie ( $P(0) = 0$ ) nous permettent d'obtenir les valeurs classiques suivantes, pour  $j = 0, 1, 2, \dots$  :

$$\alpha_j = \frac{(2j+1)\pi}{2L}.$$

Si nous sommes dans le cas d'une condition de Neumann à l'entrée et à la sortie du conduit, nous avons alors, pour  $j = 0, 1, 2, \dots$  :

$$\alpha_j = \frac{j\pi}{L}.$$

De la même manière que dans la partie précédente, nous arrivons à  $\alpha_j^2 = k^2 - \lambda_{mn}^2$ , ainsi les nombres d'onde de résonances  $k_{mn}^j$  du système sont définies telles que :

$$k_{mn}^j = \sqrt{\alpha_j^2 + \lambda_{mn}^2}. \quad (\text{B.3})$$

Nous remarquons ainsi que pour  $m = n = 0$ , nous retrouvons bien les fréquences de résonances longitudinales.

## Chapitre B : Méthode d'impédance ramenée

### B.2 Cas général

---

## B.2 Cas général

Lorsque nous avons des conditions aux limites quelconques, nous pouvons utiliser une méthode d'impédance ramenée pour calculer la partie axiale de la pression. Nous présentons ici, les équations permettant de mettre en place cette méthode.

D'après (B.1), nous avons pour un mode  $mn$  :

$$P_{mn}(z) = C_{mn}e^{-ik_{mn}z} + D_{mn}e^{ik_{mn}z},$$

et d'après l'équation d'Euler

$$V_{mn}(z) = -\frac{k_{mn}}{k}(C_{mn}e^{-ik_{mn}z} - D_{mn}e^{ik_{mn}z}).$$

Ainsi, en  $z = 0$  :

$$P_{mn}(0) = C_{mn} + D_{mn},$$

$$V_{mn}(0) = -\frac{k_{mn}}{k}(C_{mn} - D_{mn}),$$

or

$$P_{mn}(z) = (C_{mn} + D_{mn}) \cos(k_{mn}z) - i(C_{mn} - D_{mn}) \sin(k_{mn}z),$$

d'où

$$P_{mn}(z) = P_{mn}(0) \cos(k_{mn}z) + i\frac{k}{k_{mn}}V_{mn}(0) \sin(k_{mn}z).$$

De même

$$V_{mn}(z) = -\frac{k_{mn}}{k}((C_{mn} - D_{mn}) \cos(k_{mn}z) - i(C_{mn} + D_{mn}) \sin(k_{mn}z)),$$

ainsi

$$V_{mn}(z) = V_{mn}(0) \cos(k_{mn}z) + i\frac{k_{mn}}{k}P_{mn}(0) \sin(k_{mn}z).$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{pmatrix} P_{mn}(z) \\ V_{mn}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k_{mn}z) & i\frac{k}{k_{mn}}\sin(k_{mn}z) \\ i\frac{k_{mn}}{k}\sin(k_{mn}z) & \cos(k_{mn}z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{mn}(0) \\ V_{mn}(0) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour deux points quelconques  $z_1$  et  $z_2$ , avec  $\frac{k}{k_{mn}} = Z_{c_{mn}}$ , nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} P_{mn}(z_1) \\ V_{mn}(z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(ik_{mn}(z_2 - z_1)) & -Z_{c_{mn}}\sinh(ik_{mn}(z_2 - z_1)) \\ -\frac{\sinh(ik_{mn}(z_2 - z_1))}{Z_{c_{mn}}} & \cosh(ik_{mn}(z_2 - z_1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{mn}(z_2) \\ V_{mn}(z_2) \end{pmatrix},$$

où  $Z_{c_{mn}}$  est un élément de la matrice diagonale impédance caractéristique  $\mathbf{Z}_c$  :

$$Z_{c_{mn}} = \frac{k}{k_{mn}}.$$



## Annexe C

# Impédance de rayonnement pour des fréquences réelles

### C.1 Formulation de Zorumski

Les calculs détaillés ici sont présentés par Zorumski dans [8]. Précisons avant de commencer qu'il ne travaille pas avec la même normalisation que nous (défini par l'équation A.11), il a choisit la relation suivante :

$$\int_0^b k^2 r \tilde{\psi}_{mn}(kr) \tilde{\psi}_{m'l}(kr) dr = \delta_{mm'} \delta_{nl}.$$

Afin de reprendre exactement la formulation proposée par Zorumski, nous travaillons dans cette partie (et uniquement ici) avec cette normalisation.

Nous exprimons la pression à l'extérieur du conduit en un point  $M(r, \theta, z)$  par la représentation de Green de la pression, sans terme source nous avons :

$$p(r, \theta, z) = \int_S p(M_0) \partial_n \mathcal{G}(M, M_0) - \mathcal{G}(M, M_0) \partial_n p(M_0) dS_0.$$

Rappelons que le point  $M_0$  de coordonnées  $(r_0, \theta_0, z_0)$  est placé sur le plan  $(r - \theta)$  pour  $z = 0$ , correspondant à la surface de sortie de cylindre, comme montré sur la figure 1.1 ou 1.2.

D'après les conditions aux limites nous avons  $\partial_n p(M) = 0$  sauf sur la surface  $S_0$ . Nous cherchons alors la fonction de Green satisfaisant  $\partial_n \mathcal{G}(M, M_0) = 0$  sur  $S$ .

La pression à l'extérieur du conduit, (nous omettrons le facteur temporel  $e^{-i\omega t}$ ) qui relie le champ en tout point de l'espace extérieur au cylindre à la vitesse normale sur le plan de sortie  $S_0$  du cylindre, s'exprime alors d'après la relation d'Euler :

$$p(r, \theta, z) = i\omega\rho \int_0^{2\pi} \int_0^b r_0 v(r_0, \theta_0) \mathcal{G}(M, M_0) dr_0 d\theta_0.$$

## Chapitre C : Impédance de rayonnement pour des fréquences réelles

### C.1 Formulation de Zorumski

avec le point M qui tend vers la surface  $S_0$ , la fonction de Green vaut alors  $\mathcal{G}(M, M_0) = -\frac{e^{ikh}}{2\pi h}$  et nous obtenons donc la relation suivante de la pression pour  $z \geq 0$  :

$$p(r, \theta, z) = -\frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^b r_0 v(r_0, \theta_0) \frac{e^{ikh}}{h} dr_0 d\theta_0, \quad (C.1)$$

où

$$h = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + z^2]^{\frac{1}{2}}.$$

La pression et la vitesse en tout point du conduit peuvent s'exprimer en fonction des modes du tuyau  $\tilde{\psi}_{mn}(kr)e^{im\theta}$ . Ainsi en  $z = 0$  :

$$p(r, \theta, z = 0) = \rho c^2 \sum_m \sum_n \tilde{\psi}_{mn}(kr) e^{im\theta} P_{mn}, \quad (C.2)$$

$$v(r, \theta, z = 0) = c \sum_m \sum_n \tilde{\psi}_{mn}(kr) e^{im\theta} V_{mn}. \quad (C.3)$$

En substituant l'équation (C.3) dans l'équation (C.1), nous obtenons la pression à l'extérieur du tuyau en fonction des termes de l'amplitude modale de la vitesse  $V_{mn}$  :

$$p(r, \theta, z) = -\frac{i\omega\rho c}{2\pi} \sum_m \sum_n V_{mn} \int_0^{2\pi} e^{im\theta_0} \int_0^b r_0 \frac{e^{ikh}}{h} \tilde{\psi}_{mn}(kr_0) dr_0 d\theta_0. \quad (C.4)$$

Il convient à présent d'éliminer la fonction de  $h$  dans l'équation (C.4). D'après l'intégrale infinie de Sonine ([21], p.416, Eq. 4) nous avons, en  $z = 0$  :

$$\frac{e^{ikh}}{h} = k \int_0^\infty \tilde{\tau} (\tilde{\tau}^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} J_0(\tilde{\tau} kh) d\tilde{\tau}. \quad (C.5)$$

Selon le théorème d'addition de Neumann ([21], p. 358, Eq. 1), en  $z = 0$  :

$$J_0(\tilde{\tau} kh) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\tilde{\tau} kr) J_m(\tilde{\tau} kr_0) \exp[im(\theta - \theta_0)]. \quad (C.6)$$

En introduisant (C.6) dans (C.5), nous obtenons le résultat désiré en  $z = 0$  :

$$\frac{e^{ikh}}{h} = k \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[im(\theta - \theta_0)] \int_0^\infty \tilde{\tau} (\tilde{\tau}^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} J_m(\tilde{\tau} kr) J_m(\tilde{\tau} kr_0) d\tilde{\tau}, \quad (C.7)$$

ainsi l'équation de la pression rayonnée prise à l'extrémité du tuyau (C.4) est donnée par :

$$p(r, \theta, z = 0) = -i\rho c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \sum_n V_{mn} \int_0^\infty \tilde{\tau} (\tilde{\tau}^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} J_m(\tilde{\tau} kr) \tilde{D}_{mn}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}. \quad (C.8)$$

avec

$$\tilde{D}_{mn}(\tilde{\tau}) = k^2 \int_0^b r_0 J_m(\tilde{\tau} k r_0) \tilde{\psi}_{mn}(k r_0) d r_0. \quad (C.9)$$

D'après Jahnke et Emde [36] p.146, nous arrivons à :

$$\tilde{D}_{mn}(\tilde{\tau}) = k b \frac{\tilde{\tau} \tilde{\psi}_{mn}(k b) J'_m(\tilde{\tau} k b) - \xi_{mn} \tilde{\tau}_{mn}^l(k b) J_m(\tilde{\tau} k b)}{\xi_{mn}^2 - \tilde{\tau}^2}. \quad (C.10)$$

Comme nous avons choisi de travailler avec des parois rigides, nous avons  $\tilde{\psi}'_{mn}(k b) = \frac{J'_m(\xi_{mn} k b)}{N_{mn}} = 0$ , ainsi :

$$\tilde{D}_{mn}(\tilde{\tau}) = k b \frac{\tilde{\tau} \tilde{\psi}_{mn}(k b) J'_m(\tilde{\tau} k b)}{\xi_{mn}^2 - \tilde{\tau}^2}. \quad (C.11)$$

Utilisons maintenant la condition de normalisation choisie par Zorumski :

$$\int_0^b k^2 r \tilde{\psi}_{mn}(k r) \tilde{\psi}_{m'l}(k r) d r = \delta_{mm'} \delta_{nl}. \quad (C.12)$$

Commençons par multiplier l'équation (C.2) par

$$k^2 r \tilde{\psi}_{m'l}(k r) e^{-im'\theta},$$

en intégrant sur la section transverse du guide nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-im'\theta} d\theta \int_0^b k^2 r \tilde{\psi}_{m'l}(k r) p(r, \theta, z=0) d r &= \rho c^2 \sum_m \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-m')} d\theta \\ &\times \sum_n \int_0^b k^2 r \tilde{\psi}_{mn}(k r) \tilde{\psi}_{m'l}(k r) P_{mn} d r, \end{aligned} \quad (C.13)$$

ainsi pour  $m' = m$  et  $l = n$ , d'après la condition de normalisation (C.12), nous avons la relation suivante :

$$\int_0^{2\pi} e^{-im'\theta} d\theta \int_0^b k^2 r \tilde{\psi}_{m'l}(k r) p(r, \theta, z=0) d r = 2\pi \rho c^2 P_{mn}. \quad (C.14)$$

En procédant de même pour l'équation (C.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-im'\theta} d\theta \int_0^b k^2 r \tilde{\psi}_{m'l}(k r) p(r, \theta, z=0) d r &= -i \rho c^2 \sum_m \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-m')} d\theta \\ &\times \sum_n \int_0^\infty \int_0^b k^2 r V_{mn} \tilde{\psi}_{m'l}(k r) d r \int_0^\infty \tilde{\tau} (\tilde{\tau}^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} J_m(\tilde{\tau} k r) \tilde{D}_{mn}(\tilde{\tau}) d \tilde{\tau}, \end{aligned} \quad (C.15)$$

## Chapitre C : Impédance de rayonnement pour des fréquences réelles

### C.2 Ecriture de la matrice impédance de rayonnement

d'après la condition de normalisation (C.12), pour  $m = m'$  et  $n = l$ , nous avons alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-im'\theta} d\theta \int_0^b k^2 r \tilde{\psi}_{m'l}(kr) p(r, \theta, z=0) dr = -i2\pi \rho c^2 \\ \times \sum_{m'} \sum_l V_{m'l} \int_0^\infty \tilde{\tau}(\tilde{\tau}^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \tilde{D}_{mn}(\tilde{\tau}) \tilde{D}_{m'l}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (C.16)$$

Les équations (C.2) et (C.8) expriment la même grandeur, nous arrivons ainsi en égalisant les termes (C.14) et (C.16) à :

$$P_{mn} = \sum_{m'} \sum_l Z_{mnm'l} V_{m'l} \quad (C.17)$$

avec

$$Z_{mnm'l} = -i \int_0^\infty \tilde{\tau}(\tilde{\tau}^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \tilde{D}_{mn}(\tilde{\tau}) \tilde{D}_{m'l}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} \quad (C.18)$$

qui est un coefficient de notre impédance de rayonnement (notée  $\mathbf{Z}_{\text{ray}}$  dans la partie précédente). L'intégrale (C.18) peut être découpée en deux, pour tenir compte de la pseudo singularité en  $\tilde{\tau} = 1$ , avec le changement de variables  $\tilde{\tau} = \sin \phi$  dans la première et  $\tilde{\tau} = \cosh \varsigma$  dans la seconde :

$$Z_{mnm'l} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \tilde{D}_{mn}(\sin \phi) \tilde{D}_{m'l}(\sin \phi) d\phi - i \int_0^\infty \cosh \varsigma \tilde{D}_{mn}(\cosh \varsigma) \tilde{D}_{m'l}(\cosh \varsigma) d\varsigma \quad (C.19)$$

### C.2 Ecriture de la matrice impédance de rayonnement

Limitons nous ici, par exemple, au cas où les indices  $m, n, m'$  et  $l$  varient seulement de 0 à 1. La matrice impédance de rayonnement  $\mathbf{Z}_{\text{ray}}$  constituée des éléments  $Z_{mnm'l}$ , s'écrit alors telle que :

$$\mathbf{Z}_{\text{ray}} = \begin{pmatrix} Z_{0000} & Z_{0001} & Z_{0010} & Z_{0011} \\ Z_{0100} & Z_{0101} & Z_{0110} & Z_{0111} \\ Z_{1000} & Z_{1001} & Z_{1010} & Z_{1011} \\ Z_{1100} & Z_{1101} & Z_{1110} & Z_{1111} \end{pmatrix},$$

or, d'après la condition d'orthonormalité des modes, nous devons avoir  $m' = m$ , la matrice  $\mathbf{Z}_{\text{ray}}$  devient ainsi :

$$\mathbf{Z}_{\text{ray}} = \begin{pmatrix} Z_{0000} & Z_{0001} & 0 & 0 \\ Z_{0100} & Z_{0101} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{1010} & Z_{1011} \\ 0 & 0 & Z_{1110} & Z_{1111} \end{pmatrix}.$$

C'est donc cette matrice que nous ramenons au point source  $z'$  à l'aide de la relation 1.16 :

$$\mathbf{Z}^+(z') = -\mathbf{Z}_c \mathbf{S}_s^{-1} \mathbf{C}_s + \mathbf{Z}_c \mathbf{S}_s^{-1} [\mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{Z}_{\text{ray}} - \mathbf{S}_s^{-1} \mathbf{C}_s]^{-1} \mathbf{S}_s^{-1},$$

avec :

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} (\sinh(ik_{00}l_2))^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\sinh(ik_{01}l_2))^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sinh(ik_{10}l_2))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\sinh(ik_{11}l_2))^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\cosh(ik_{00}l_2)}{\sinh(ik_{00}l_2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cosh(ik_{01}l_2)}{\sinh(ik_{01}l_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cosh(ik_{10}l_2)}{\sinh(ik_{10}l_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cosh(ik_{11}l_2)}{\sinh(ik_{11}l_2)} \end{pmatrix},$$

et

$$\mathbf{Z}_c = k \begin{pmatrix} k_{00}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{01}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{10}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{11}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Notons ici que les éléments  $Z_{mnml}$  sont notés  $Z_{mnl}$  dans ce rapport, pour faciliter l'écriture de la matrice  $\mathbf{Z}_{\text{ray}}$ .

Présentons maintenant quelques exemples d'impédances de rayonnement pour différents modes.

### C.3 Exemples d'impédances de rayonnement

Rappelons ici que l'impédance de rayonnement est la matrice dont les éléments  $Z_{mnl}$  donnent l'amplitude de pression du mode  $mn$  due à une amplitude de vitesse donnée du mode  $ml$ . La partie réelle de l'impédance de rayonnement correspond à l'énergie acoustique rayonnée et la partie imaginaire à une correction de longueur (correspondant à une correction de masse) ajoutée à la colonne d'air.

#### C.3.1 Impédances directes

Considérons dans un premier temps les éléments tels que  $mn=ml$ . Ils correspondent à une impédance dite directe. C'est à dire qu'ils donnent la contribution d'un mode de pression par un mode de vitesse avec la même amplitude modale  $P_{mn}$  et  $V_{ml}$ .

Nous pouvons observer sur la figure (C.1) que pour le mode plan (figure du haut) si  $kb \ll 1$  alors l'impédance est faible et imaginaire, ainsi il n'y a pas de pression acoustique rayonnée par la colonne d'air pour de telles fréquences. Puis lorsque la fréquence augmente, la partie réelle devient supérieure à la partie imaginaire, ce qui caractérise un rayonnement acoustique. En hautes fréquences, la partie réelle tend vers 1 (ou  $\rho c$  selon la normalisation) qui est l'impédance caractéristique des ondes planes en espace libre, ce qui indique qu'il n'y

## Chapitre C : Impédance de rayonnement pour des fréquences réelles

### C.3 Exemples d'impédances de rayonnement

---

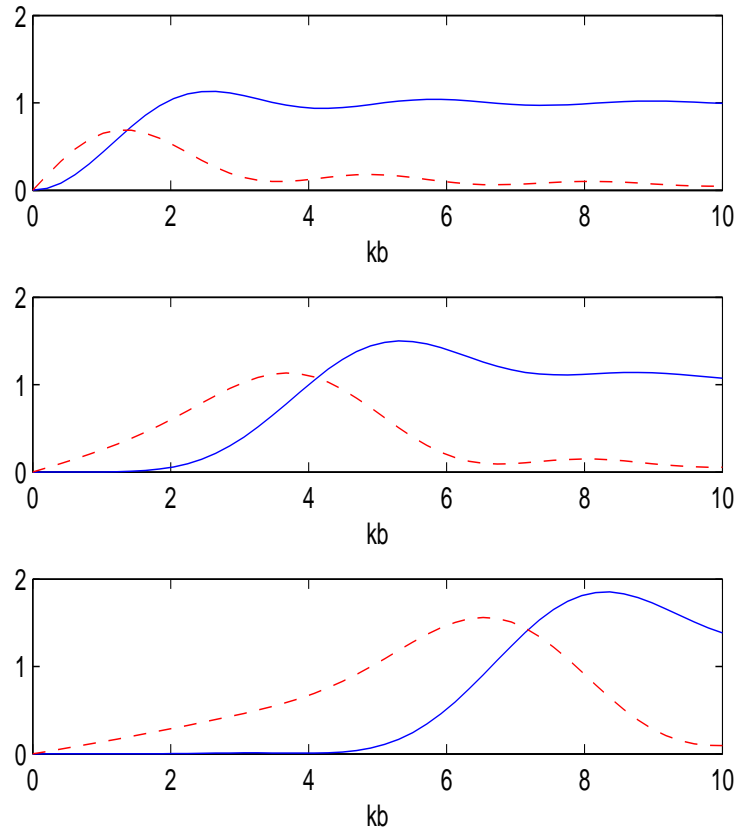


Figure C.1 – Partie réelle (—) et valeur absolue de la partie imaginaire (- - -) de l'impédance de rayonnement pour le mode 000 (en haut), pour le mode 011 (au milieu) et pour le mode 022 (en bas).

a pas de réflexions à la fin du tube et que la pression acoustique est totalement rayonnée dans le milieu externe.

Notons que les impédances directes des modes convergent plus lentement vers l'impédance caractéristique quand  $n$  augmente (voir figure (C.1)). En effet, l'impédance caractéristique normalisée du mode  $mn$  est  $k/k_{mn}$  (nous avons  $Z_{c_{mn}} = \frac{k}{k_{mn}}$ ) qui tend vers 1 quand  $kb \gg \gamma_{mn}$ , ainsi plus  $n$  augmente plus  $\gamma_{mn}$  est important et de ce fait  $Z_{mn}$  ne commence à converger vers  $Z_{c_{mn}}$  qu'à des fréquences plus élevées. Ceci exprime le fait que l'efficacité de rayonnement est moindre aux basses fréquences lorsque la fréquence de coupure du mode correspondant est élevée.

### C.3.2 Impédances intermodales

Considérons maintenant les éléments de la matrice impédance pour lesquels  $n \neq l$ . Ils correspondent à des impédances couplées donnant la contribution d'un mode de pression  $mn$  généré par un mode de vitesse  $ml$  avec des distributions spatiales  $P_{mn}$  et  $V_{ml}$  différentes (le résultat est identique pour un mode de pression  $ml$  généré par un mode de vitesse  $mn$ ).

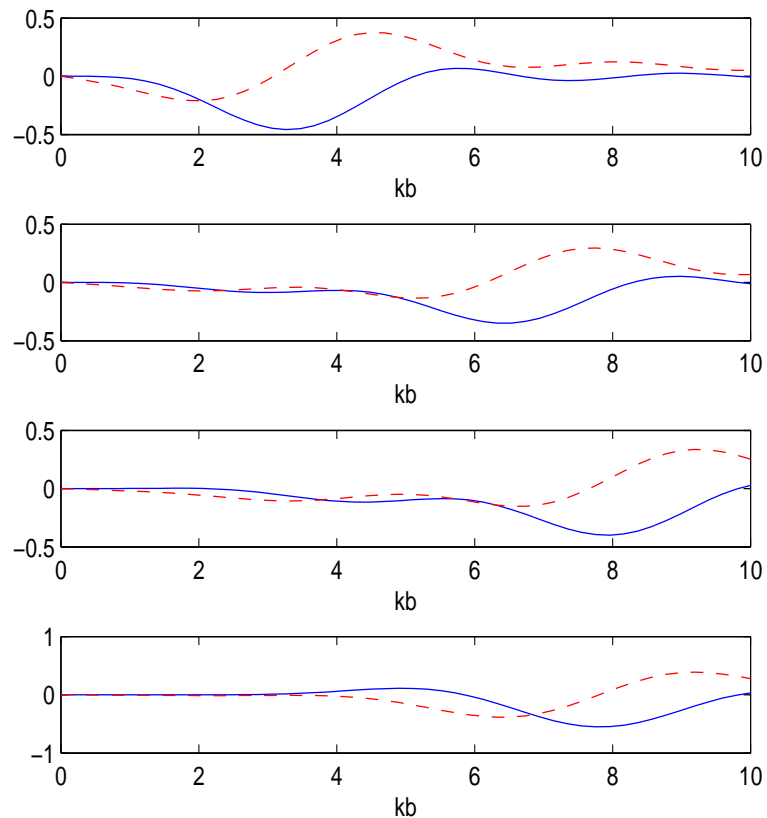


Figure C.2 – Partie réelle (—) et valeur absolue de la partie imaginaire (- - -) de l'impédance de rayonnement pour le mode 001 (figure 1), pour le mode 002 (figure 2), pour le mode 102 (figure 3) et pour le mode 112 (figure 4).

Nous pouvons voir sur la figure (C.2) que les valeurs de l'impédance intermodale tendent vers 0, ce qui implique qu'il y a très peu de couplage entre le mode de pression  $mn$  et le mode de vitesse  $ml$ . Pour quelques fréquences (surtout en basses fréquences), nous pouvons voir que la partie réelle de l'impédance est légèrement supérieure à la partie imaginaire (avec cependant une amplitude beaucoup moins élevée que pour l'impédance directe) ce qui

## Chapitre C : Impédance de rayonnement pour des fréquences réelles

### C.3 Exemples d'impédances de rayonnement

---

indique la présence d'un couplage intermodal. Nous remarquons que la partie réelle devient supérieure à la partie imaginaire autour de la fréquence de coupure du mode de pression  $mn$ . Le couplage intermodal ne participe donc que très peu au rayonnement. Ces résultats ont notamment été présentés dans [37].



## Annexe D

# Calculs détaillés de la nouvelle formulation de l'impédance de rayonnement

Les calculs ici présentés sont très proches de ceux présentés au chapitre 1. La différence principale repose sur le fait que nous avons choisi une normalisation des modes de conduits (équation D.12) différente que celle choisie par Zorumski dans [8], ainsi qu'un nouveau développement de la fonction de Green en espace libre  $e^{ikh}/h$  afin que celui-ci soit valide dans tout le plan complexe.

Repartons de l'expression de la pression à l'extérieur du conduit :

$$p(r, \theta, z) = -\frac{i\omega\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^b r_0 v(r_0, \theta_0) \frac{e^{ikh}}{h} dr_0 d\theta_0, \quad (\text{D.1})$$

où

$$h = [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + z^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous utilisons également l'expression de la pression et la vitesse en tout point du conduit en fonction des modes du tuyau :

$$p(r, \theta, z=0) = \rho c^2 \sum_m \sum_n \psi_{mn}(r) e^{im\theta} P_{mn}, \quad (\text{D.2})$$

$$v(r, \theta, z=0) = c \sum_m \sum_n \psi_{mn}(r) e^{im\theta} V_{mn}. \quad (\text{D.3})$$

En substituant l'équation (D.3) dans l'équation (D.1), nous obtenons la pression à l'extérieur du tuyau en fonction des termes de l'amplitude modale de la vitesse  $V_{mn}$  :

$$p(r, \theta, z) = -\frac{i\omega\rho c}{2\pi} \sum_m \sum_n V_{mn} \int_0^{2\pi} e^{im\theta_0} \int_0^b r_0 \frac{e^{ikh}}{h} \psi_{mn}(r_0) dr_0 d\theta_0. \quad (\text{D.4})$$

## Chapitre D : Calculs détaillés de la nouvelle formulation de l'impédance de rayonnement

Jusqu'à présent les calculs sont strictement identique à ceux détaillés dans le premier chapitre. Mais afin d'éliminer la fonction de  $h$  dans l'équation (D.4), nous allons utiliser un nouveau développement la fonction  $e^{ikh}/h$  suivant le signe  $\Re(k)$  et  $\Im(k)$ . Attachons nous ici à présenter le cas où  $k$  est réel. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikh}}{h} = & J_0(kh)k\sqrt{2\epsilon}(1-i) + i \int_0^{|k|(1-\epsilon)} J_0(\tau h) \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} d\tau \\ & + \int_{|k|(1+\epsilon)}^{\infty} J_0(\tau h) \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau, \end{aligned} \quad (D.5)$$

avec  $\epsilon \ll 1$ .

Selon le théorème d'addition de Neumann ([21], p. 358, Eq. 1), en  $z = 0$  :

$$J_0(\tau h) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\tau r) J_m(\tau r_0) e^{im(\theta - \theta_0)} \quad (D.6)$$

En introduisant (D.6) dans (D.5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikh}}{h} = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) J_m(kr_0) e^{im(\theta - \theta_0)} k\sqrt{2\epsilon}(1-i) \\ & + i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{|k|(1-\epsilon)} J_m(\tau r) J_m(\tau r_0) e^{im(\theta - \theta_0)} \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} d\tau \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{|k|(1+\epsilon)}^{\infty} J_m(\tau r) J_m(\tau r_0) e^{im(\theta - \theta_0)} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau. \end{aligned} \quad (D.7)$$

Ainsi en introduisant D.7 dans D.4, nous obtenons une nouvelle expression de la pression rayonnée prise à l'extrémité du tuyau :

$$\begin{aligned} p(r, \theta, z = 0) = & -\frac{i\omega\rho c}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_n V_{mn} \int_0^{2\pi} \int_0^b r_0 \psi_{mn}(r_0) e^{im\theta_0} \\ & \times \left[ J_m(kr) J_m(kr_0) e^{im(\theta - \theta_0)} k\sqrt{2\epsilon}(1-i) \right. \\ & + i \int_0^{|k|(1-\epsilon)} J_m(\tau r) J_m(\tau r_0) e^{im(\theta - \theta_0)} \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} d\tau \\ & \left. + \int_{|k|(1+\epsilon)}^{\infty} J_m(\tau r) J_m(\tau r_0) e^{im(\theta - \theta_0)} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau \right] dr_0 d\theta_0. \end{aligned} \quad (D.8)$$

Posons

$$D_{mn}(\tau) = \int_0^b r J_m(\tau r) \psi_{mn}(r) dr \quad (D.9)$$

et d'après Jahnke et Emde [36] p.146, nous arrivons à (avec des parois rigides) :

$$D_{mn}(\tau) = b \frac{\tau \psi_{mn}(b) J'_m(\tau b)}{\lambda_{mn}^2 - \tau^2}, \quad (D.10)$$

nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
 p(r, \theta, z = 0) &= -i\omega\rho c \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \sum_n V_{mn} \\
 &\times \int_0^b \left[ D_{mn}(k) J_m(kr) k \sqrt{2\epsilon}(1-i) + i \int_0^{|k|(1-\epsilon)} D_{mn}(\tau) J_m(\tau r) \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|k|(1+\epsilon)}^{\infty} D_{mn}(\tau) J_m(\tau r) \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau \right] dr_0 d\theta_0. \tag{D.11}
 \end{aligned}$$

Utilisons maintenant la condition de normalisation des modes choisie telle que :

$$\int_0^b \int_0^{2\pi} \phi_{mn}(r) \phi_{m'l}^*(r) dS = S \delta_{mm'} \delta_{nl}, \tag{D.12}$$

soit

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-im'\theta} d\theta \int_0^b r \psi_{mn}(r) \psi_{m'l}(r) dr = S \delta_{mm'} \delta_{nl}. \tag{D.13}$$

Commençons par multiplier l'équation (D.2) par  $\psi_{m'l} e^{-im'\theta}$  et en intégrant sur la surface  $S$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^b p(r, \theta, z = 0) e^{-im'\theta} \psi_{m'l}(r) r dr d\theta &= \rho c^2 \sum_m \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-m')} d\theta \\
 &\times \sum_n \int_0^b r \psi_{mn}(r) \psi_{m'l}(r) P_{mn} dr, \tag{D.14}
 \end{aligned}$$

ainsi pour  $m' = m$  et  $l = n$ , d'après la condition de normalisation (D.13), nous avons la relation suivante :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^b p(r, \theta, z = 0) e^{-im'\theta} \psi_{m'l}(r) r dr d\theta = \rho c^2 S P_{mn}. \tag{D.15}$$

Remarquons ici que nous n'avons plus la présence d'un  $2\pi$  par rapport à la formulation de Zorumski, ceci est dû à notre condition de normalisation différente (qui est faite sur la surface du cylindre et non plus seulement par rapport à son rayon). En procédant de même pour l'équation (D.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^b p(r, \theta, z = 0) e^{-im'\theta} \psi_{m'l}(r) r dr d\theta &= -i\rho c \omega \sum_m \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-m')} d\theta \\
 &\times \sum_l V_{m'l} \left[ D_{mn}(k) D_{m'l}(k) k \sqrt{2\epsilon}(1-i) + i \int_0^{|k|(1-\epsilon)} D_{mn}(\tau) D_{m'l}(\tau) \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|k|(1+\epsilon)}^{\infty} D_{mn}(\tau) D_{m'l}(\tau) \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} d\tau \right], \tag{D.16}
 \end{aligned}$$

## Chapitre D : Calculs détaillés de la nouvelle formulation de l'impédance de rayonnement

---

avec, pour  $m = m'$  :

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-m')} d\theta = 2\pi.$$

Les équations (D.2) et (D.11) expriment la même grandeur, nous arrivons ainsi en égalisant les termes (D.15) et (D.16) à :

$$P_{mn} = \sum_l Z_{mnl} V_{ml} \quad (D.17)$$

avec

$$\begin{aligned} Z_{mnl} = & -ik2\pi S^{-1} [D_{mn}(k)D_{ml}(k)k\sqrt{2\epsilon}(1-i) + i \int_0^{|k|(1-\epsilon)} \frac{\tau}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} D_{mn}(\tau)D_{ml}(\tau) d\tau \\ & + \int_{|k|(1+\epsilon)}^{\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} D_{mn}(\tau)D_{ml}(\tau) d\tau]. \end{aligned} \quad (D.18)$$

Nous obtenons au final une matrice de rayonnement dont les éléments sont adimensionnés, tout comme la formulation proposée par Zorumski ainsi que l'impédance de rayonnement  $\mathbf{Z}_{\text{ray}}$  utilisée dans la méthode d'impédance ramenée.

## Annexe E

# Influence des modes d'ordres supérieurs sur l'impédance de rayonnement du mode plan

### E.1 Fréquences réelles

Commençons par reprendre rapidement les calculs détaillés dans [24], nous permettant d'obtenir l'impédance de rayonnement du mode plan en tenant compte de l'influence des modes non plans.

Repardons ici de l'expression de la pression et de la vitesse en fonction des modes propres du conduit :

$$p(r, \theta, z = 0) = \rho c^2 \sum_m \sum_n \tilde{\psi}_{mn}(kr) e^{im\theta} P_{mn},$$

$$v(r, \theta, z = 0) = c \sum_m \sum_n \tilde{\psi}_{mn}(kr) e^{im\theta} V_{mn}.$$

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, les éléments  $P_{mn}$  du vecteur  $\mathbf{P}$  et  $V_{mn}$  du vecteur  $\mathbf{V}$  sont reliés par les éléments  $Z_{mnl}$  de la matrice de rayonnement  $\mathbf{Z}_{\text{ray}}$  tel que :

$$P_{mn} = \sum_l Z_{mnl} V_{ml}.$$

Le principe de cette méthode revient à écrire les vecteurs  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{V}$  et la matrice de rayonnement  $\mathbf{Z}_{\text{ray}}$  en les décomposant en blocs, séparant les composantes planes des non planes, de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} P_{00} \\ \mathbf{P}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{000} & \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z} & \mathbf{Z}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{00} \\ \mathbf{V}' \end{bmatrix}, \quad (\text{E.1})$$

où  $Z_{000}$  est l'impédance de rayonnement du piston plan et  $\mathbf{z}$  donne les coefficients des modes non plans pour une vitesse incidente plane  $V_{00}$ . Si nous sommes en dessous de la

## Chapitre E : Influence des modes d'ordres supérieurs sur l'impédance de rayonnement du mode plan

### E.1 Fréquences réelles

fréquence de coupure du premier mode non plan, nous pouvons utiliser la relation suivante pour relier les modes non plans :

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{Z}'_c \mathbf{V}', \quad (\text{E.2})$$

avec  $\mathbf{Z}'_c$  la matrice diagonale composée des éléments de l'impédance caractéristique adimensionnés  $Z'_c, mn = k/k_{mn}$ . Nous pouvons ainsi exprimer les composantes planes de la pression de la manière suivante :

$$P_{00} = Z_{000}V_{00} + z^T V' = (Z_{000} - z^T (Z' + Z'_c)^{-1} z) V_{00} = \mathcal{Z}_r V_{00}, \quad (\text{E.3})$$

avec  $\mathcal{Z}_r$  qui exprime alors l'impédance du mode plan influencé par les modes non plans :

$$\mathcal{Z}_r = (Z_{000} - z^T (Z' + Z'_c)^{-1} z). \quad (\text{E.4})$$

Dans [24], une approximation de l'impédance de rayonnement  $\mathcal{Z}_r$  est définie (tenant compte de l'influence des modes non plan). Dans le cas d'un écran infini, l'approximation pour le coefficient de réflexion vaut :

$$|\mathcal{R}_{app}| = \frac{1 + 0.730(kb)^2}{1 + 1.730(kb)^2 + 0.372(kb)^4 + 0.0231(kb)^6}, \quad (\text{E.5})$$

et pour la correction de longueur :

$$|\Delta L/b| = 0.8216 \frac{1 + 0.244(kb)^2}{1 + 0.723(kb)^2 - 0.0198(kb)^4 + 0.00366(kb)^6}, \quad (\text{E.6})$$

il est ainsi facile d'en déduire l'approximation de l'impédance de rayonnement en utilisant la relation suivante :

$$\mathcal{Z}_{app} = \frac{1 + \mathcal{R}_{app}}{1 - \mathcal{R}_{app}} = -i \tan \left( k\Delta L - i \frac{1}{2} \ln |\mathcal{R}_{app}| \right).$$

avec  $\mathcal{R}_{app} = |\mathcal{R}_{app}| e^{2ik\Delta L}$

Comme nous pouvons le voir sur la figure E.1, l'impédance de rayonnement du mode plan est bien influencée par la prise en compte des modes non plans.

Notons, qu'à l'aide de la figure E.2 nous voyons une convergence dans l'effet des modes non plans sur l'impédance de rayonnement du mode plan. En effet, nous observons sur cette figure une différence maximale de 5% entre l'impédance du piston plan et  $\mathcal{Z}_r$  avec l'influence d'un mode non plan et une différence de l'ordre de 1 % entre  $\mathcal{Z}_r$  avec l'influence d'un mode non plan ou de deux. Il est donc important de noter que dans cette zone fréquentielle (en dessous de la fréquence de coupure du premier mode non plan) la prise en compte d'un seul mode non plan est suffisante pour bien décrire le rayonnement de notre système. Remarquons que dans le calcul des fréquences de résonances d'un cylindre avec écran au chapitre 1, nous avons également observé que la prise en compte d'un seul mode non plan suffisait à bien décrire le couplage du mode plan avec le milieu extérieur.

Nous observons également que  $\mathcal{Z}_r$  (influencé par les modes non plans) et son approximation  $\mathcal{Z}_{app}$  obtenue à l'aide d'approximants de Padé dans [24] sont en très bon accord.

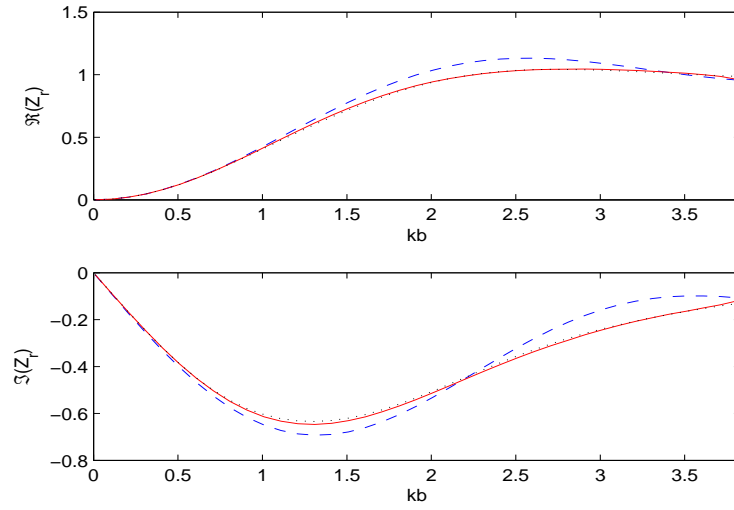


Figure E.1 – Impédance de rayonnement mode plan  $Z_r$  avec l'influence de 0 (piston plan — — —) et de 5 modes non plans (—) ainsi que l'approximation  $Z_{app}$  (...).

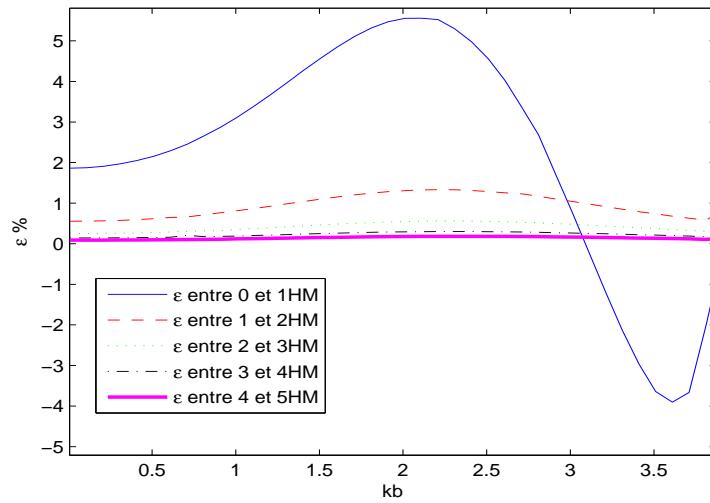


Figure E.2 – Différence relative  $\epsilon$  en pourcent, entre  $Z_r$  pour  $n$  HM et  $Z_r$  pour  $n + 1$  HM, pour  $k$  réel.

En effet, comme nous pouvons le voir sur la figure E.3 (correspondant à la figure 4 de [24]), l'erreur due à l'approximation est inférieure à 3% pour  $kb < 3.8317$ .

## Chapitre E : Influence des modes d'ordres supérieurs sur l'impédance de rayonnement du mode plan

### E.1 Fréquences réelles

---

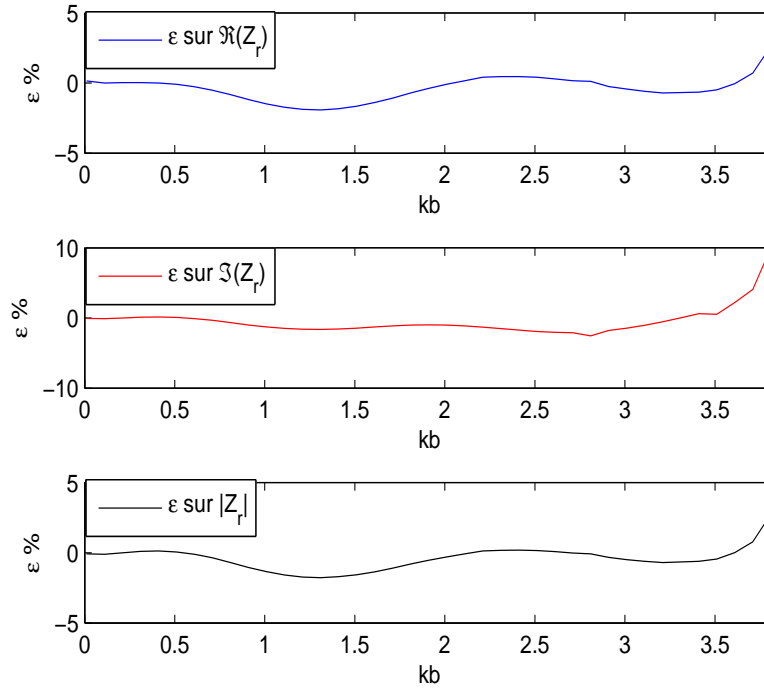


Figure E.3 – Différence relative  $\epsilon$  en pourcent, entre  $Z_{app}$  et  $Z_r$  avec l'influence de 5 modes non plans.

Dans [24], l'impédance de rayonnement utilisée est celle définie précédemment pour des fréquences réelles (voir Eq. 1.37), tous les résultats sont donc limités aux fréquences ayant une partie imaginaire nulle. Regardons alors ce qu'il se passe lorsque nous étendons nos calculs à tout le plan complexe.



## E.2 Fréquences complexes

Pour obtenir  $\mathcal{Z}_r$ , nous utilisons ici les impédances de rayonnement pour les différentes configurations, suivant le signe de  $\Re(k)$  et  $\Im(k)$ , présentées dans la partie 1.2.2.

Nous avons tracé la comparaison entre l'impédance de rayonnement mode plan  $\mathcal{Z}_r$  avec l'influence de 0 (piston plan) et de 5 modes non plans ainsi que l'approximation  $\mathcal{Z}_{app}$  (qui est calculée dans [24] pour une impédance de rayonnement valide seulement pour des fréquences réelles) pour différentes valeurs non nulles de la partie imaginaire de  $kb$  (de  $\Im(kb) = -0,1i$  sur la figure E.4 à  $\Im(kb) = -3i$  sur la figure E.13).

Nous remarquons alors trois faits importants. Premièrement, nous nous apercevons que l'approximation  $\mathcal{Z}_{app}$  reste comparable à  $\mathcal{Z}_r$  lorsque la partie imaginaire de  $kb$  n'est pas trop importante (pour  $-\Im(kb) < 0.1i$ ). Dans un deuxième temps, nous voyons qu'il en va de même pour l'impédance de rayonnement du piston plan, qui reste proche de  $\mathcal{Z}_r$  pour  $-\Im(kb) < 0.4i$ . Au delà de ces zones fréquentielles,  $\mathcal{Z}_{app}$  ou  $Z_{000}$  décrivent mal le rayonnement du mode plan. En effet, nous remarquons à l'aide de la figure E.7 une différence maximale d'environ 10% entre l'impédance du piston plan  $Z_{000}$  et  $\mathcal{Z}_r$  avec la prise en compte d'un mode supérieur lorsque  $\Im(kb) = -0,4i$ . Lorsque  $\Im(kb) = -i$ , nous observons sur la figure E.9 une différence maximale de 20% entre ces deux impédances. Ainsi, la prise en compte d'un mode de conduit d'ordre supérieur est alors nécessaire pour bien décrire le rayonnement du mode plan.

Enfin, nous remarquons à l'aide de la figure E.14, où nous avons tracé l'impédance de rayonnement du mode plan  $\mathcal{Z}_r$  avec l'influence de 5 modes non plans, qu'il y a des pôles qui apparaissent à certaines fréquences complexes. Nous avons des difficultés à les interpréter physiquement. Mais en faisant le parallèle avec une "classique" impédance de rayonnement où des lobes apparaissent à certaines fréquences (réelles) dans son diagramme de directivité, nous pouvons alors penser que les pôles complexes observés peuvent être considéré comme des zones fréquentielles où notre système (ici un cylindre avec écran infini) ne rayonne pas.

## Chapitre E : Influence des modes d'ordres supérieurs sur l'impédance de rayonnement du mode plan

### E.2 Fréquences complexes

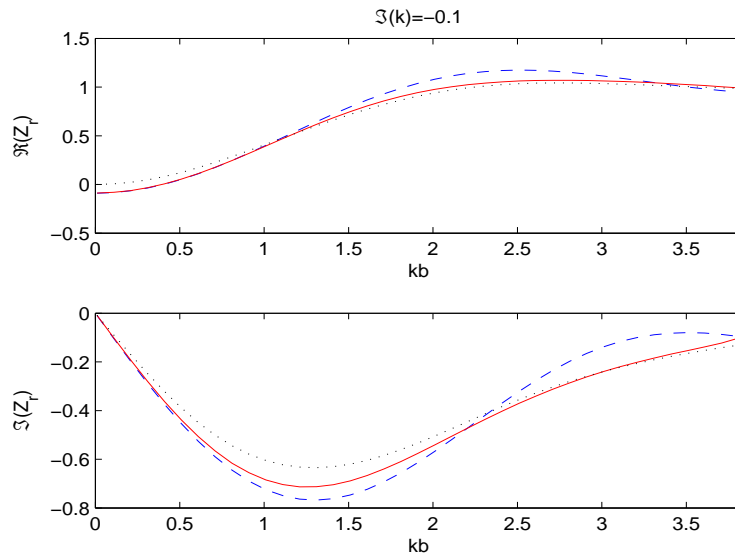


Figure E.4 – Impédance de rayonnement mode plan  $Z_r$  avec l'influence de 0 (piston plan — — —) et de 5 modes non plans (—) ainsi que l'approximation  $Z_{app}$  (...) pour  $\Im(kb) = -0.1i$ .

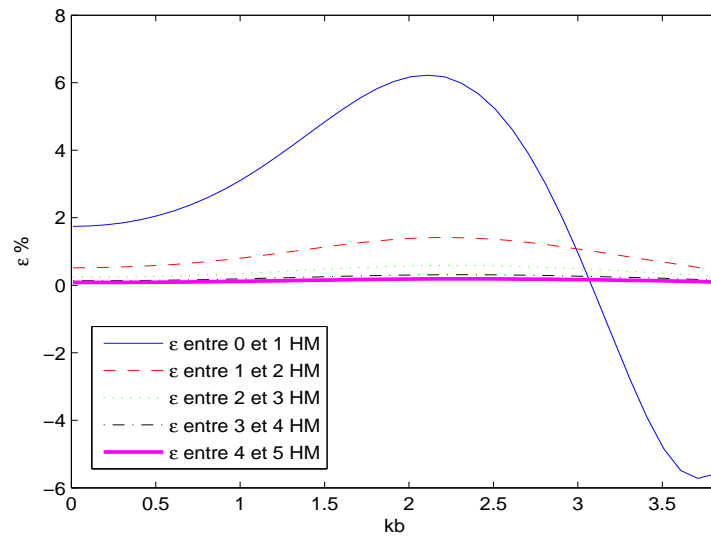


Figure E.5 – Différence relative  $\epsilon$  en pourcent, entre  $Z_r$  pour  $n$  HM et  $Z_r$  pour  $n+1$  HM, pour  $\Im(kb) = -0.1i$ .

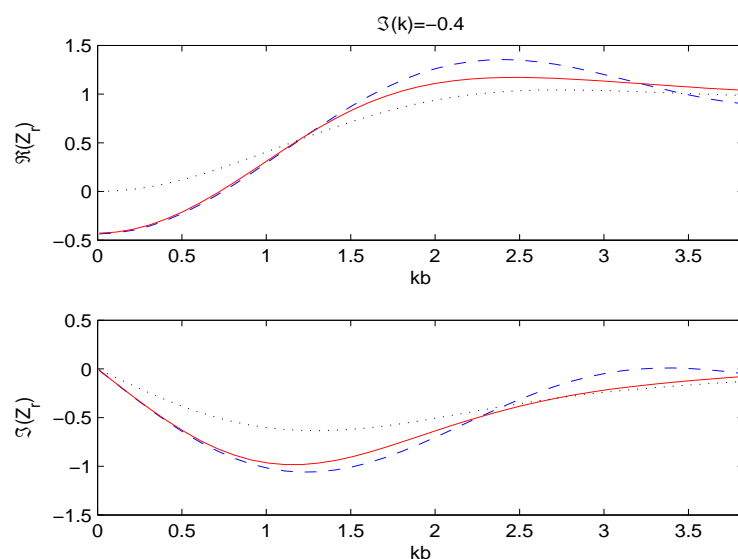


Figure E.6 – Impédance de rayonnement mode plan  $Z_r$  avec l'influence de 0 (piston plan — — —) et de 5 modes non plans (—) ainsi que l'approximation  $Z_{app}$  (...) pour  $\Im(kb) = -0.4i$ .

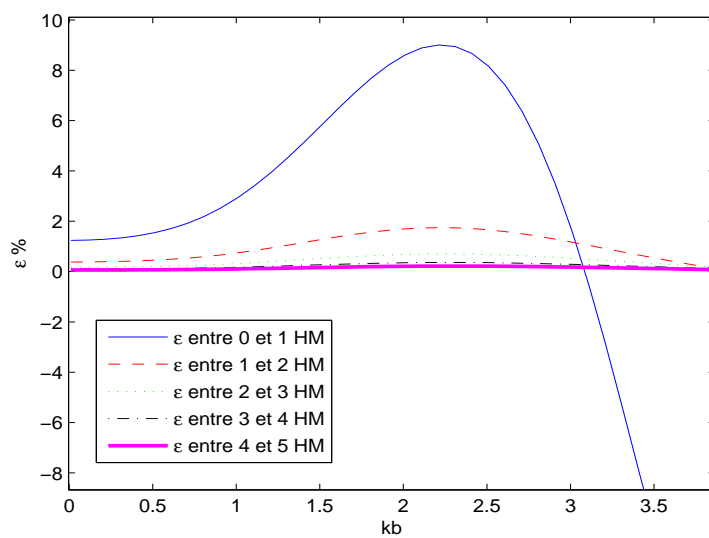


Figure E.7 – Différence relative  $\epsilon$  en pourcent, entre  $Z_r$  pour  $n$  HM et  $Z_r$  pour  $n + 1$  HM, pour  $\Im(kb) = -0,4i$ .

## Chapitre E : Influence des modes d'ordres supérieurs sur l'impédance de rayonnement du mode plan

### E.2 Fréquences complexes

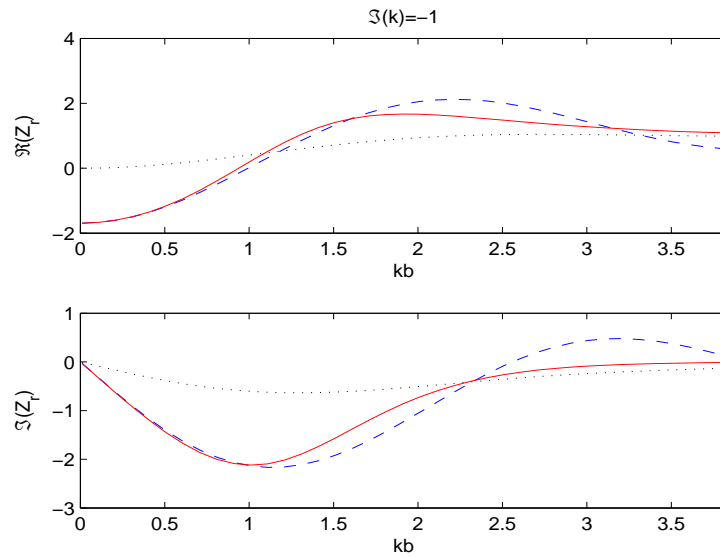


Figure E.8 – Impédance de rayonnement mode plan  $Z_r$  avec l'influence de 0 (piston plan —) et de 5 modes non plans (—) ainsi que l'approximation  $Z_{app}$  (...) pour  $\Im(kb) = -1i$ .

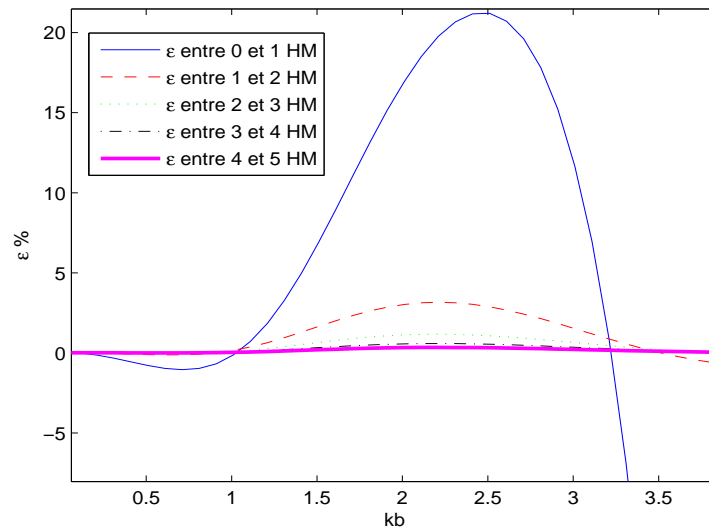


Figure E.9 – Différence relative  $\epsilon$  en pourcent, entre  $Z_r$  pour  $n$  HM et  $Z_r$  pour  $n+1$  HM, pour  $\Im(kb) = -i$ .

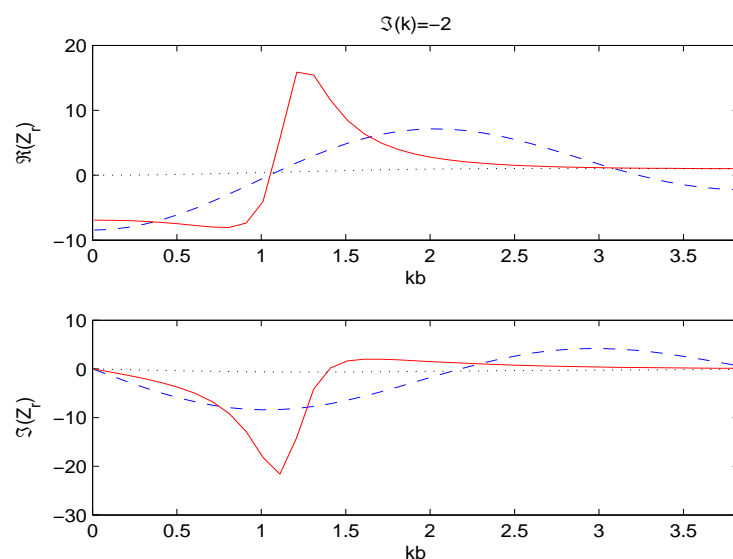


Figure E.10 – Impédance de rayonnement mode plan  $Z_r$  avec l'influence de 0 (piston plan — —) et de 5 modes non plans (—) ainsi que l'approximation  $Z_{app}$  (...) pour  $\Im(kb) = -2i$ .

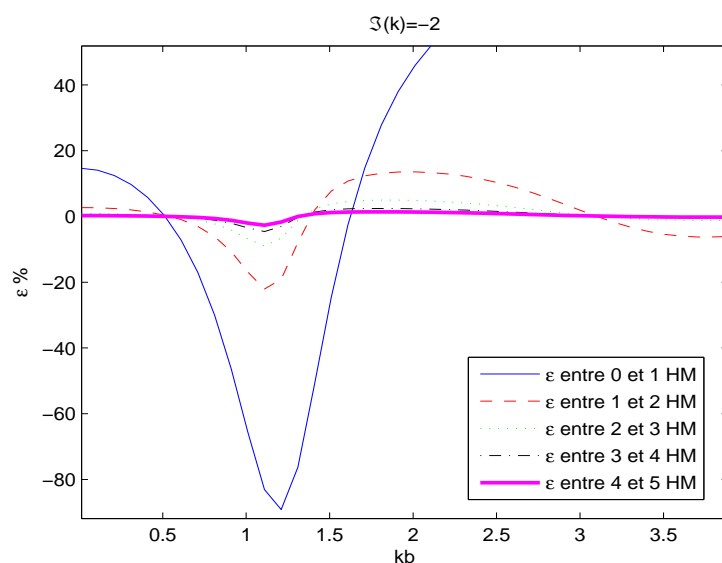


Figure E.11 – Différence relative  $\epsilon$  en pourcent, entre  $Z_r$  pour  $n$  HM et  $Z_r$  pour  $n+1$  HM, pour  $\Im(kb) = -2i$ .

## Chapitre E : Influence des modes d'ordres supérieurs sur l'impédance de rayonnement du mode plan

### E.2 Fréquences complexes

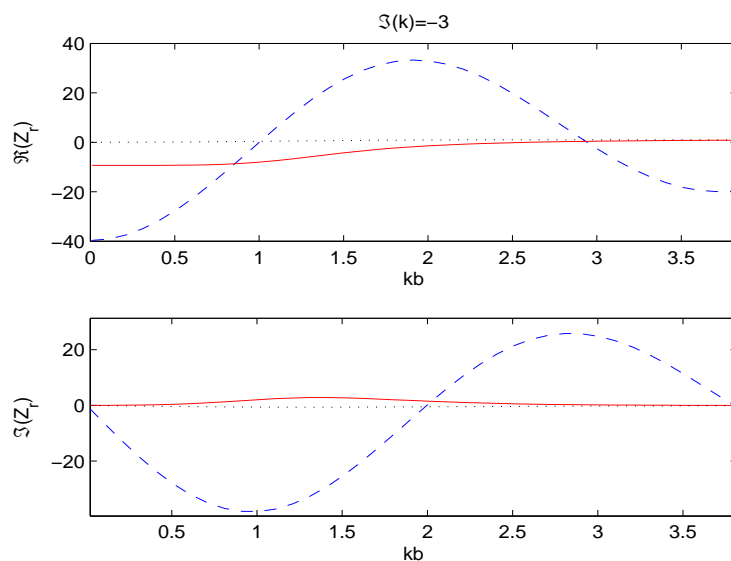


Figure E.12 – Impédance de rayonnement mode plan  $Z_r$  avec l'influence de 0 (piston plan —) et de 5 modes non plans (—) ainsi que l'approximation  $Z_{app}(\dots)$  pour  $\Im(kb) = -3i$ .

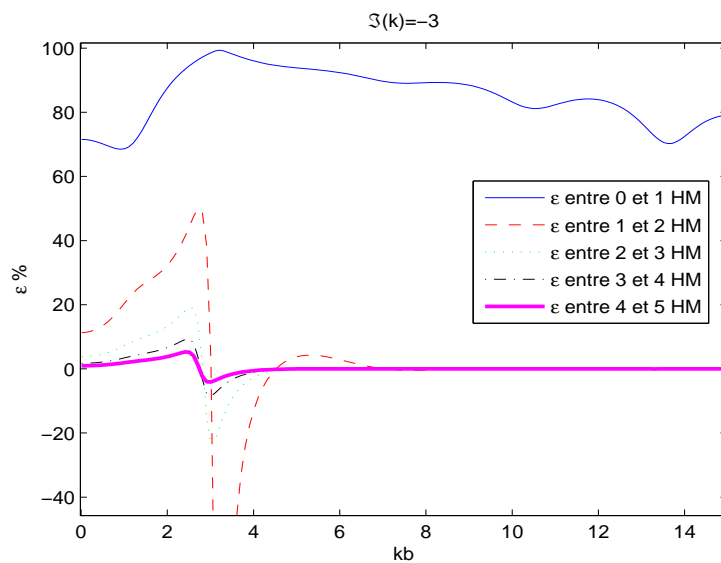


Figure E.13 – Différence relative  $\epsilon$  en pourcent, entre  $Z_r$  pour  $n$  HM et  $Z_r$  pour  $n+1$  HM, pour  $\Im(kb) = -3i$ .

## Chapitre E : Influence des modes d'ordres supérieurs sur l'impédance de rayonnement du mode plan

### E.3 Méthode pour l'extension à tout le domaine fréquentiel pour un tuyau de longueur finie

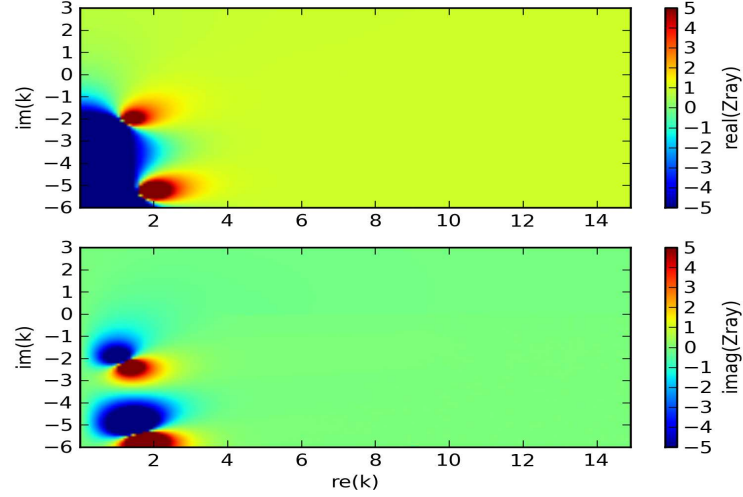


Figure E.14 – Impédance de rayonnement du mode plan  $Z_r$  avec l'influence de 5 modes non plans.

### E.3 Méthode pour l'extension à tout le domaine fréquentiel pour un tuyau de longueur finie

Précédemment nous considérons un tuyau semi-infini, ce qui nous permettait d'éliminer les ondes retours et notamment d'écrire la relation E.2. Si nous voulons travailler au dessus de la première fréquence de coupure du premier mode non plan, nous devons alors tenir compte de ce qui se passe dans notre tuyau de longueur  $L$ . Pour cela, nous utilisons la relation 1.18, pour relier la pression  $\mathbf{P}'$  et la vitesse  $\mathbf{V}'$  des modes non plans. Nous avons alors la relation suivante :

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{Z}'_c \mathbf{S}_e^{-1} \mathbf{C}_e \mathbf{V}', \quad (\text{E.7})$$

ce avec  $\mathbf{C}_e$  la matrice diagonale constituée des  $\cosh(ik_{mn}L)$  et  $\mathbf{S}_e$  la matrice diagonale constituée des  $\sinh(ik_{mn}L)$ , où  $L$  est la longueur de notre tuyau. Nous obtenons alors :

$$\mathcal{Z}_r = (Z_{000} - z^T (Z' + Z'_c S_e^{-1} C_e)^{-1} z), \quad (\text{E.8})$$

ce qui correspond à l'impédance du mode plan influencé par les modes non plans présents dans le tuyau (et non plus seulement à leur influence juste à l'ouverture en  $z = 0$ ). Nous remarquons alors que si nous faisons tendre  $L \rightarrow +\infty$  dans la relation E.8, nous retrouvons bien la relation E.4 (en travaillant avec  $k_{mn} = k_{mn}(1 + i\epsilon)$  pour  $\epsilon > 0$ ).

Les calculs de l'impédance du mode plan influencé par les modes non plans lorsque ces derniers sont propagatifs sont donc possible à partir de la formulation E.8. Nous n'avons pas pu les obtenir à temps pour les présenter ici, mais nous espérons les avoir et les publier prochainement.

## Annexe F

# Nouvelle formulation de la correction de longueur de Norris

Nous donnons ici une copie du mail de A. Norris datant du 08/09/2005 concernant une observation faite par C. Morfey sur la correction de longueur donné dans son article [6].

*I hope this is of some use... its been a while since I looked at that paper but I immediately noticed something peculiar ... Let x stand for kb, then the function in [6] eq. (29) is*

$$\frac{\Delta L}{b} = \frac{0.82159 - 0.49 * x^2}{1 - 0.46 * x^3} \quad (F.1)$$

*zero on top=  $\sqrt{(0.82159/0.49)} = 1.2949$*

*zero on bottom  $(1/0.46)^{(1/3)} = 1.2954$*

*hummm! ... so lets get rid of the zero on top and bottom : since for some reason 0.82159 has the most digits, lets keep it, and the upstairs zero, but change the one below by replacing 0.46 with*

$$(0.49/0.82159)^{3/2} = 0.4606$$

*rather than do the algebra I went straight to the machine (I am in front of it after all) and find :*

$$\frac{\Delta L}{b} = \frac{0.82159 - 0.49 * x^2}{1 - (0.49/0.82159)^{3/2} * x^3}$$

*looks quite like the figure in the paper [6]. I leave it to your enjoyment to see what happens when the original function is plotted!*

*Anyway I did the algebra and the (safe/new/improved?) form is :*

$$\frac{\Delta L}{b} = 0.82159 * \frac{1 + \frac{x}{1.2949}}{1 + \frac{x}{1.2949} + (\frac{x}{1.2949})^2} \quad (F.2)$$

*Please don't ask me why eq. (29) in [6] was written the way it was !*



## Chapitre F : Nouvelle formulation de la correction de longueur de Norris

---

Pour illustrer les propos de A. Norris, nous avons tracé les corrections de longueurs obtenues avec l'ancienne et la nouvelle formulation sur la figure F.1.

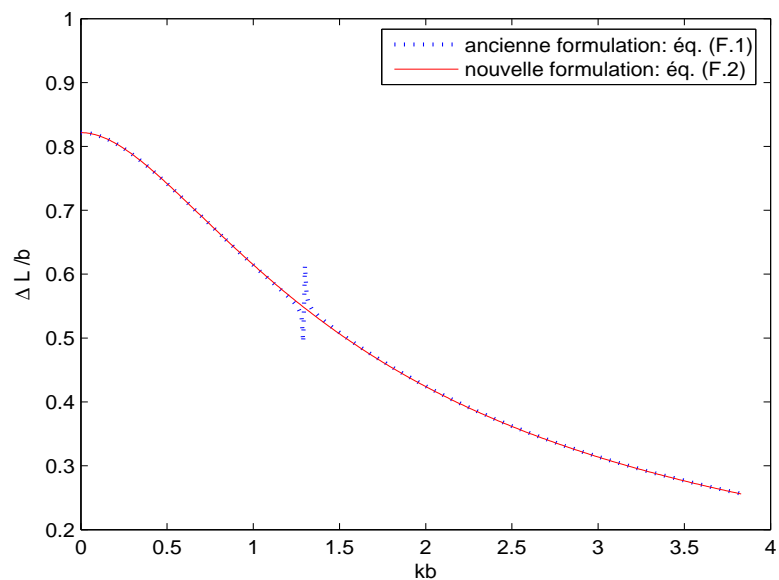


Figure F.1 – Correction de longueur obtenue avec l'ancienne formulation F.1 (pointillé bleu) et avec la nouvelle F.2 (en trait plein rouge).

## Annexe G

# Ajout des pertes visco-thermiques

Dans tous les résultats théoriques présentés dans cette étude, nous n'avons pas tenu compte des pertes visco-thermiques. Les seules pertes observées sont donc directement reliées aux pertes par couplage avec le milieu extérieur (rayonnement). Mais si nous souhaitons prendre en considération les pertes visco-thermiques, nous pouvons utiliser les résultats présentés dans [38] et [39]. Ces derniers ont l'avantage d'être valables pour tous les modes, propagatifs ou évanescents.

Rappelons que sans pertes visco-thermiques, le nombre d'onde axial  $k_{mn}$  est défini tel que  $k_{mn}^2 = k^2 - \lambda_{mn}^2$  et si  $k^2 > \lambda_{mn}^2$ , nous avons :

$$k_{mn} = \sqrt{k^2 - \lambda_{mn}^2}$$

et pour  $k^2 < \lambda_{mn}^2$ , nous avons :

$$k_{mn} = \pm i \sqrt{\lambda_{mn}^2 - k^2}$$

Avec les pertes visco-thermiques, ce nombre d'onde devient alors selon [38] et [39] :

$$k_{mn} = \chi_{mn} - i\alpha_{mn}$$

où

$$\chi_{mn} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \{A_{mn} + I_{mn} + [(A_{mn} + I_{mn})^2 + R_{mn}^2]^{1/2}\}^{1/2},$$

et

$$\alpha_{mn} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \{-(A_{mn} + I_{mn}) + [(A_{mn} + I_{mn})^2 + R_{mn}^2]^{1/2}\}^{1/2}.$$

Avec

$$\begin{aligned} A_{mn} &= k^2 - \lambda_{mn}^2, \\ R_{mn} &= 2k \frac{\Re(\epsilon_{mn}/b)}{1 - (m/\gamma_{mn})^2}, \\ I_{mn} &= 2k \frac{\Im(\epsilon_{mn}/b)}{1 - (m/\gamma_{mn})^2}, \end{aligned}$$

où

$$\epsilon_{mn} = \{1 - (\lambda_{mn}/k)^2[1 - (m/\gamma_{mn})^2]\}\epsilon_\nu + \epsilon_t.$$

Pour  $c = 344m/s$ , nous avons  $\Re(\epsilon_\nu) = \Im(\epsilon_\nu) = 2,03.10^{-5}f^{1/2}$  et  $\Re(\epsilon_t) = \Im(\epsilon_t) = 0,95.10^{-5}f^{1/2}$ .

Pour le mode plan, nous pouvons utiliser le résultat classique donné par Kirchhoff [40] :

$$\alpha_{00} = \pm \frac{\Re(\epsilon_\nu + \epsilon_t)}{b}.$$

Sur les figures G.1 et G.2, nous pouvons voir la différence engendrée par l'ajout des pertes visco-thermiques sur les nombres d'ondes de résonances  $k_{00}^j$  pour un cylindre de longueur  $L = 1m50$ . Il est important de noter que les pertes visco-thermiques sont non négligeables par rapport aux pertes par rayonnement seulement en basses fréquences.

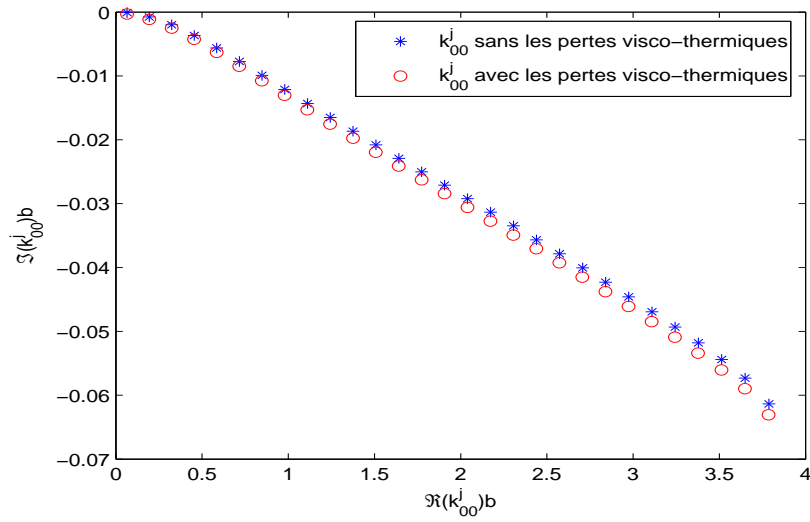


Figure G.1 – Nombre d'onde  $k_{00}^j$  dans le cas avec (o) et sans (\*) pertes visco-thermiques, pour un cylindre de longueur  $L = 1m50$ .

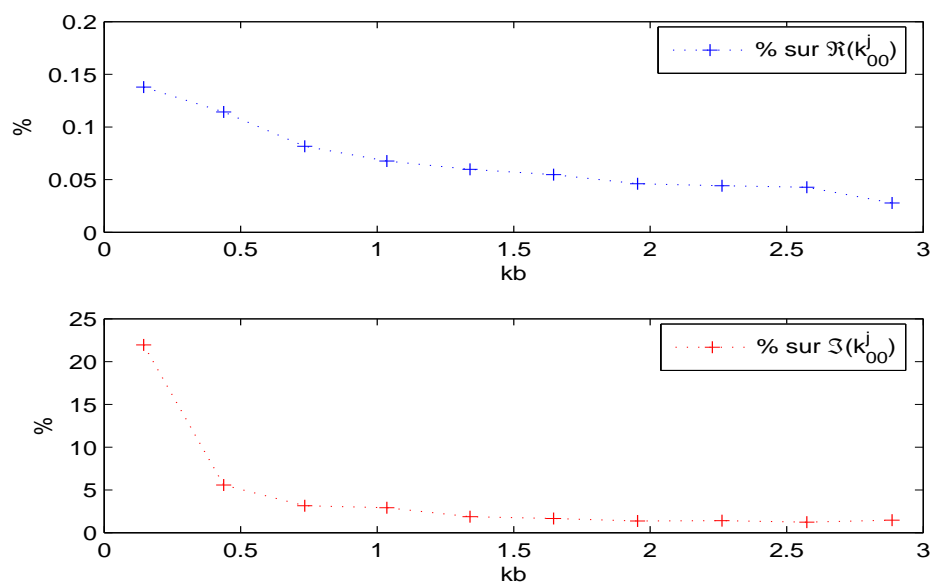


Figure G.2 – Pourcentage dû aux pertes visco-thermiques par rapport aux pertes par rayonnement ( $(k_{sanspertes} - k_{avecpertes})/k_{sanspertes}$ ), sur la partie réelle (en haut) et sur la partie imaginaire (en bas) des résonances d'un tuyau de longueur  $L = 1m50$ .

# Table des figures

1	Résonateur cylindrique de longueur finie débouchant dans un écran infini, étudié dans le premier chapitre. . . . .	14
2	Système entièrement décrit avec la méthode d'éléments finis de frontières, étudié dans le deuxième chapitre. . . . .	15
3	Système dont la partie cylindrique est décrite par la théorie modale et la partie de géométrie plus complexe par la méthode BEM. . . . .	16
1.1	Schéma du système étudié. . . . .	23
1.2	Schéma du conduit avec les coordonnées utilisées. . . . .	26
1.3	Déformation du contour d'intégration. . . . .	32
1.4	Partie réelle (trait plein) et valeur absolue de la partie imaginaire (pointillés) de l'impédance de rayonnement pour le mode plan ( $m = n = 0$ et $l = 0$ ) en fonction de $kb$ , calculé avec la formulation de Zorumski (C.19) et avec notre formulation (1.37) (croix). . . . .	34
1.5	Valeur absolue en % de la différence ( $D = \frac{ \Re(k_{00,r}^0) - k_{00,\Delta L}^0 }{\Re(k_{00,r}^0)}$ ) entre la valeur de la partie réelle de la première fréquence de résonance du mode plan ( $m=n=0$ ) calculée avec la méthode de Newton ( $k_{00,r}^0$ ) et celle estimée avec la correction de longueur définie par l'équation (1.42) ( $k_{00,\Delta L}^j$ ), pour plusieurs ratios $L/b$ avec $L = 1m$ . . . . .	40
1.6	Résonances $k_{00,r}^j$ du mode plan ( $m = 0, n = 0$ ) avec l'influence de 0 ( $l = 0$ ), 1 ( $l = 1$ ) et 2 ( $l = 2$ ) modes de conduit d'ordres supérieurs, avec $L = 1m$ and $b = 0, 1m$ . . . . .	41
1.7	Correction de longueur obtenue avec la relation donnée par Norris (1.42) (trait plein) et obtenue avec la relation (1.43) (pointillé), en dessous de la fréquence de coupure $\lambda_{01}$ . . . . .	43
1.8	$k_{00,r}^j$ , $k_{01,r}^j$ , $k_{02,r}^j$ avec $L = 1m$ et $b = 0, 1m$ . . . . .	44
1.9	Profil dans le conduit du module de la fonction de Green $\Gamma$ autour de $k_{00,r}^{14}$ avec 3HM. . . . .	45
1.10	Profil dans le conduit du module de la fonction de Green $\Gamma$ autour de $k_{01,r}^7$ avec 3HM. . . . .	45
1.11	Profil dans le conduit du module de la fonction de Green $\Gamma$ autour de $k_{02,r}^2$ avec 3HM. . . . .	45

## TABLE DES FIGURES

### TABLE DES FIGURES

---

1.12	Evolution de la partie réelle des $j$ premières fréquences de résonance $k_{00,r}^j$ du mode plan en fonction de $\eta_\rho$ , pour $L = 1m$ et $b = 0,1m$ . . . . .	47
1.13	Evolution de la partie imaginaire des $j$ premières fréquences de résonance $k_{00,r}^j$ du mode plan en fonction de $\eta_\rho$ , pour $L = 1m$ et $b = 0,1m$ . . . . .	47
1.14	Evolution de la partie réelle des $j$ premières fréquences de résonance $k_{10,r}^j$ du mode 10 en fonction de $\eta_\rho$ , pour $L = 1m$ et $b = 0,1m$ . . . . .	48
1.15	Evolution de la partie imaginaire des $j$ premières fréquences de résonance $k_{10,r}^j$ du mode 10 en fonction de $\eta_\rho$ , pour $L = 1m$ et $b = 0,1m$ . . . . .	48
1.16	Evolution de la partie réelle des $j$ premières fréquences de résonance $k_{01,r}^j$ du mode 01 en fonction de $\eta_\rho$ , pour $L = 1m$ et $b = 0,1m$ . . . . .	49
1.17	Evolution de la partie imaginaire des $j$ premières fréquences de résonance $k_{01,r}^j$ du mode 01 en fonction de $\eta_\rho$ , pour $L = 1m$ et $b = 0,1m$ . . . . .	49
2.1	Schématisme en coupe du problème étudié . . . . .	52
2.2	Schéma du système étudié avec une boîte de dimension CEI/3 avec un maillage de 5cm sur la boîte et de 1 cm sur le tube . . . . .	57
2.3	Fréquences de résonance d'un cylindre de longueur $L = 0,5m$ et de rayon $b = 0,047m$ obtenues par méthode modale avec 1 H.M et par méthode BEM pour différents maillages avec une boîte de taille CEI/3. . . . .	60
2.4	Cartographie de $\det \mathbf{M}_1$ dans le plan complexe (partie réelle de la fréquence en abscisse et partie imaginaire en ordonnée) pour le cas d'une boîte CEI/3 avec maillage de 10cm sur la boîte et de 2cm sur le tube (T2B10). . . . .	61
2.5	Cartographie de $\det \mathbf{M}_1$ dans le plan complexe (partie réelle de la fréquence en abscisse et partie imaginaire en ordonnée) pour le cas d'une boîte CEI/3 avec maillage de 5cm sur la boîte et de 1cm sur le tube (T1B5). . . . .	62
2.6	Correction de longueur $\Delta L/b$ pour différents maillages avec une boîte de taille CEI/3 ainsi que celle obtenue avec les résultats de la méthode modale avec 1 H.M. . . . .	63
2.7	Profil du système étudié : tube cylindrique de longueur $L = 1m$ et de rayon $b = 0,064m$ avec un pavillon de de longueur $0,5m$ avec un rayon d'entrée de $0,064m$ , un rayon de sortie de $0,25m$ et un paramètre de forme $\nu = 0,5$ . . . . .	64
2.8	Fréquences de résonance dans le cas d'un tube cylindrique de 1m50 (méthode modale *) comparées à celles d'un tube cylindrique de 1m avec un pavillon de Bessel de $0,5m$ (méthode BEM T2B8 +). . . . .	65
2.9	Facteur de pertes ( $\zeta(f_{00,r}^j) =  \Im(f_{00,r}^j) /\Re(f_{00,r}^j)$ ) en pourcentage dans le cas d'un tube cylindrique de 1m50 (méthode modale *) comparées à celles d'un tube cylindrique de 1m avec un pavillon de Bessel de $0,5m$ (méthode BEM T2B8 +). . . . .	66
2.10	Profil de différents pavillons de Bessel avec un rapport $r_{final}/r_{initial} = 3,9$ pour différents paramètres de forme $\nu$ (du centre vers les extrémités : $\nu = 0,35, \nu = 0,5, \nu = 1, \nu = 2$ et $\nu = 4$ ). . . . .	69

**TABLE DES FIGURES**  
**TABLE DES FIGURES**

2.11	Partie réelle, partie imaginaire et facteur de pertes ( $\zeta(f_{00,r}^0) =  \Im(f_{00,r}^0) /\Re(f_{00,r}^0)$ ) du système <i>tube+pavillon</i> pour un tube de $1m$ et un pavillon de Bessel de $0,5m$ avec un rapport $r_{final}/r_{initial} = 3,9$ pour différents paramètres de forme $\nu$ . . . . .	69
2.12	Partie réelle, partie imaginaire et facteur de pertes ( $\zeta(f_{00,r}^1) =  \Im(f_{00,r}^1) /\Re(f_{00,r}^1)$ ) du système <i>tube+pavillon</i> pour un tube de $1m$ et un pavillon de Bessel de $0,5m$ avec un rapport $r_{final}/r_{initial} = 3,9$ pour différents paramètres de forme $\nu$ . . . . .	70
2.13	Rapport des 2 premières résonances du système <i>tube+pavillon</i> pour un tube de $1m$ et un pavillon de Bessel de $0,5m$ avec un rapport $r_{final}/r_{initial} = 3,9$ pour différents facteurs de forme $\nu$ . . . . .	70
2.14	Profil de différents pavillons de Bessel avec un paramètre de forme constant $\nu = 0,5$ pour différents rapports $r_{final}/r_{initial}$ . . . . .	71
2.15	Partie réelle, partie imaginaire et facteur de pertes ( $\zeta(f_{00,r}^1) =  \Im(f_{00,r}^1) /\Re(f_{00,r}^1)$ ) du système <i>tube+pavillon</i> pour un tube de $1m$ et un pavillon de Bessel de $0,5m$ avec un paramètre de forme constant $\nu = 0,5$ pour différents rapports $r_{final}/r_{initial}$ . . . . .	71
2.16	Fréquences de résonance (figure du haut) et facteur de pertes (figure du bas), dans le cas d'un tuyau de $1m$ avec un pavillon conique de $0,5m$ (*) et dans le cas d'un pavillon de Bessel de $0,5m$ (+) (maillage T2B8). . . . .	72
2.17	Schéma du système <i>tube+pavillon</i> avec la partie cylindrique décrite par une méthode modale (trait plein) et avec la partie à géométrie variable décrite par la méthode BEM (pointillés). . . . .	74
2.18	Comparaison entre $Ze$ calculée avec la méthode BEM ( $L_{BEM} = 10cm$ et $l_z = 55cm$ ) pour un maillage T2B10 et celle calculée avec l'impédance de rayonnement analytique ( $b = 0,064m$ ). . . . .	78
2.19	Comparaison entre $Ze$ calculée avec la méthode BEM ( $L_{BEM} = 10cm$ et $l_z = 15cm$ ) pour un maillage T2B10 et celle calculée avec l'impédance de rayonnement analytique ( $b = 0,064m$ ). . . . .	79
2.20	Comparaison entre $Ze$ calculée avec la méthode BEM ( $L_{BEM} = 49cm$ et $l_z = 55cm$ ) pour un maillage T2B10 et celle calculée avec l'impédance de rayonnement analytique ( $b = 0,064m$ ). . . . .	79
2.21	Comparaison entre $Ze$ calculée avec la méthode BEM ( $L_{BEM} = 49cm$ et $l_z = 55cm$ ) avec et sans boîte pour un maillage T2B10 et celle calculée avec l'impédance de rayonnement analytique ( $b = 0,064m$ ). . . . .	80
2.22	Comparaison entre $Ze$ calculée avec la méthode BEM ( $L_{BEM} = 49cm$ et $l_z = 55cm$ ) sans boîte pour un maillage T2B10 et celle calculée avec l'impédance de rayonnement analytique ( $b = 0,064m$ ). . . . .	81
2.23	Fonction de Green obtenue avec la condition de sortie tracée sur la figure 2.21 ( $L_{BEM} = 49cm$ sans boîte) et pour une longueur de cylindre analytique $l_a = 1cm$ soit au total une longueur $L = 50cm$ (avec $b=0,064m$ ). . . . .	82

## TABLE DES FIGURES

### TABLE DES FIGURES

---

2.24	Fonction de Green obtenue avec la condition de sortie tracée sur la figure 2.21 ( $L_{BEM} = 49\text{cm}$ sans boîte) et pour une longueur de cylindre analytique $l_a = 1,01\text{m}$ soit au total une longueur $L = 1,5\text{m}$ (avec $b=0,064\text{m}$ ). . . . .	82
2.25	Maillage du pavillon de Bessel, avec la présence d'une boîte CEI, utilisé dans la méthode hybride. . . . .	85
2.26	Impédance obtenue à l'entrée du pavillon de Bessel décrit par le maillage représenté sur la figure 2.25. . . . .	85
2.27	Maillage du pavillon de Bessel, avec le profil externe qui suit le profil interne, utilisé dans la méthode hybride (éléments de 4cm). . . . .	86
2.28	Impédance obtenue à l'entrée du pavillon de Bessel décrit par le maillage représenté sur la figure 2.27. . . . .	86
2.29	Coupe de profil du maillage du pavillon de Bessel, avec le profil externe (éléments de 4cm) qui suit le profil interne (éléments de 2cm), utilisé dans la méthode entièrement BEM. . . . .	87
2.30	Premières fréquences de résonances du mode plan obtenues avec la méthode entièrement BEM (*) et avec la méthode hybride (+) dans le cas d'un système <i>tube + pavillon de Bessel</i> . . . . .	87
2.31	Maillage de la surface de raccord $S_e$ du pavillon de Bessel, avec le profil externe qui suit le profil interne, utilisé dans la méthode hybride. . . . .	88
2.32	Maillage du pavillon conique, avec le profil externe qui suit le profil interne, utilisé dans la méthode hybride (éléments de 4cm). . . . .	89
2.33	Premières fréquences de résonances du mode plan obtenues avec la méthode entièrement BEM (*) et avec la méthode hybride (+) dans le cas d'un système <i>tube + pavillon conique</i> . . . . .	89
3.1	Dimensions du baffle "normalisé" utilisé dans [33]. . . . .	93
3.2	Source d'excitation utilisée ( $24\text{cm} \times 24\text{cm} \times 57\text{cm}$ ). . . . .	94
3.3	Bouchon avec les 5 micros demi-pouces. . . . .	95
3.4	Profil de la pression sur les 5 micros de mesure pour le mode 00, 10 et 01. . . . .	96
3.5	Profil sur la section d'entrée (en $z = -1,5\text{m}$ ) de la fonction de Green à une fréquence de résonance du mode 01, avec la position des différents micros. . . . .	97
3.6	Schéma du montage. . . . .	98
3.7	Dispositif utilisé pour l'étalonnage des micros $\mu$ . . . . .	99
3.8	Fonction de transfert $H_1$ entre la pression du micro de référence et la pression des différents micros du bouchon placés dans le dispositif représenté sur la figure 3.7, en réponse à une excitation en bruit blanc. . . . .	99
3.9	Fonction de transfert $H_i$ décrivant le rapport entre le micro de référence ( $\mu_{ref}$ ) situé à une distance $d$ de la source et l'intensité du signal bruit blanc envoyée sur celle-ci pour différentes distances $d$ . . . . .	101
3.10	Fonction de transfert $H_i$ décrivant le rapport entre le micro de référence ( $\mu_{ref}$ ) situé à 2cm de la source et l'intensité du signal bruit blanc envoyée sur celle-ci pour les différentes configurations. . . . .	101



## TABLE DES FIGURES

### TABLE DES FIGURES

---

3.11	Fonction de transfert $H_1$ avec une excitation en sinus variant de 220Hz à 340Hz dans le cas du cylindre de 1m50 bafflé avec écran. . . . .	103
3.12	Signal temporel obtenu en excitant le système avec un sinus à une fréquence de résonance du système puis en coupant l'excitation après quelques secondes. . . . .	104
3.13	Coordonnées du cercle de Kennely représentant la fonction de transfert mesurée $H_{mesure}$ dans le plan complexe. . . . .	106
3.14	Coordonnées du cercle de Kennely simplifié représentant la fonction de transfert mesurée $H_{mesure}$ dans le plan complexe. . . . .	106
3.15	Méthode du cercle de Kennely appliquée à une résonance du système avec $H_{mesure}$ (rouge) superposé à l'approximation $G_0 + R_1 H_{app}(f)$ (noir pointillé) ainsi qu'au pic de Lorentz seul $R_1 * H_{app}(f)$ (bleu). La dernière figure représente le résidu $G_0$ (correspondant à l'influence des autres pics). . . . .	107
3.16	Cercle de Kennely obtenu en traçant la fonction de transfert mesurée $H_{mesure}$ dans le plan complexe. . . . .	108
3.17	Montage expérimental pour le cas du cylindre ( $L = 1m50$ et $b = 0,064m$ ) sans écran. . . . .	109
3.18	Montage expérimental pour le cas du cylindre ( $L = 1m50$ et $b = 0,064m$ ) avec écran. . . . .	109
3.19	Fonction de transfert $H_1$ obtenue entre les micros à l'entrée du tuyau et le micro de référence, pour une excitation en bruit blanc, avec écran. . . . .	110
3.20	Fonction de transfert $H_1$ obtenue avec une excitation en sinus balayé, où nous pouvons voir l'apparition du mode 10. . . . .	111
3.21	Fonction de transfert $H_1$ obtenue avec une excitation en sinus balayé, où nous pouvons voir l'apparition du mode 01. . . . .	111
3.22	Fréquences de résonance $f_{00,r}^j$ dans le cas théorique (*) et expérimental avec écran (o) et sans écran (+). . . . .	112
3.23	Correction de longueur $\Delta L$ dans le cas théorique (—) et expérimental (avec écran + et sans écran o). . . . .	113
3.24	Projection des mesures des 5 micros sur la fonction propre $\Phi_{00}$ du guide. . . . .	114
3.25	Projection des mesures des 5 micros sur la fonction propre $\Phi_{10}$ du guide. . . . .	114
3.26	Projection des mesures des 5 micros sur la fonction propre $\Phi_{01}$ du guide. . . . .	115
3.27	Projection des mesures des 5 micros $\mu$ sur la fonction propre $\Phi_{10}$ du guide. . . . .	115
3.28	Projection des mesures des 5 micros $\mu$ sur la fonction propre $\Phi_{01}$ du guide. . . . .	116
3.29	Comparaison entre les premières fréquences de résonances du mode 01 obtenue avec la théorie modale et avec la projection des mesures des 5 micros $\mu$ sur la fonction propre $\Phi_{01}$ du guide. . . . .	116
3.30	Pavillon de Bessel réalisé expérimentalement de longueur 0,5m, de rayon d'entrée 0,064m, de rayon de sortie 0,25m et de paramètre de forme $\nu = 0,5$ . . . . .	117
3.31	Montage expérimental avec le pavillon de Bessel. . . . .	118
3.32	Montage expérimental avec le pavillon de Bessel. . . . .	118
3.33	Fonction de transfert $H_1$ du pavillon de Bessel de 0,5m seul, pour une excitation en bruit blanc. . . . .	119

## TABLE DES FIGURES

### TABLE DES FIGURES

3.34	Impédance obtenue à l'entrée du pavillon de Bessel de $0,5m$ seul avec la méthode hybride et Tubelab. . . . .	119
3.35	Fonction de transfert $H_1$ entre les micros à l'entrée du cylindre de $1m$ avec un pavillon de Bessel de $0,5m$ et le micro de référence pour une excitation en bruit blanc. . . . .	120
3.36	Impédance obtenue à l'entrée du cylindre de $1m$ avec un pavillon de Bessel de $0,5m$ avec la méthode hybride et Tubelab. . . . .	120
3.37	Fréquences de résonance du cylindre de $1m$ avec un pavillon de Bessel de $0,5m$ obtenues avec la méthode hybride (+), tout BEM (*) et modale (o). . . . .	121
3.38	Projection des mesures des 5 micros à l'entrée du cylindre de $1m$ avec un pavillon de Bessel de $0,5m$ sur la fonction propre $\Phi_{01}$ du cylindre de rayon $b = 0,064m$ . . . . .	122
3.39	Fonction de Green du cylindre de $1m$ avec un pavillon de Bessel de $0,5m$ obtenue avec la méthode hybride. . . . .	122
3.40	Pavillon conique ( $r_{initial} = 0,064m$ et $r_{final} = 0,25m$ ). . . . .	123
3.41	Fonction de transfert $H_1$ du pavillon conique de $0,5m$ seul. . . . .	124
3.42	Impédance à l'entrée du pavillon conique de $0,5m$ seul, obtenue avec la méthode hybride et Tubelab. . . . .	124
3.43	Fonction de transfert du cylindre de $1m$ avec un pavillon conique de $0,5m$ pour une excitation en bruit blanc. . . . .	125
3.44	Impédance à l'entrée du cylindre de $1m$ avec un pavillon conique de $0,5m$ , obtenue avec la méthode hybride et Tubelab. . . . .	125
3.45	Fréquences de résonance du système <i>cylindre de <math>1m</math> + pavillon conique de <math>0,5m</math></i> pour le pavillon lissé et avec la méthode BEM (maillage T2B8) et hybride. . . . .	126
C.1	Partie réelle (—) et valeur absolue de la partie imaginaire (- - -) de l'impédance de rayonnement pour le mode 000 (en haut), pour le mode 011 (au milieu) et pour le mode 022 (en bas). . . . .	142
C.2	Partie réelle (—) et valeur absolue de la partie imaginaire (- - -) de l'impédance de rayonnement pour le mode 001 (figure 1), pour le mode 002 (figure 2), pour le mode 102 (figure 3) et pour le mode 112 (figure 4). . . . .	143
E.1	Impédance de rayonnement mode plan $Z_r$ avec l'influence de 0 (piston plan - - -) et de 5 modes non plans (—) ainsi que l'approximation $Z_{app}$ (...). . . . .	151
E.2	Différence relative $\epsilon$ en pourcent, entre $Z_r$ pour $n$ HM et $Z_r$ pour $n + 1$ HM, pour $k$ réel. . . . .	151
E.3	Différence relative $\epsilon$ en pourcent, entre $Z_{app}$ et $Z_r$ avec l'influence de 5 modes non plans. . . . .	152
E.4	Impédance de rayonnement mode plan $Z_r$ avec l'influence de 0 (piston plan - - -) et de 5 modes non plans (—) ainsi que l'approximation $Z_{app}$ (...) pour $\Im(kb) = -0.1i$ . . . . .	154

E.5	Différence relative $\epsilon$ en pourcent, entre $Z_r$ pour $n$ HM et $Z_r$ pour $n + 1$ HM, pour $\Im(kb) = -0,1i$ . . . . .	154
E.6	Impédance de rayonnement mode plan $Z_r$ avec l'influence de 0 (piston plan — — —) et de 5 modes non plans (—) ainsi que l'approximation $Z_{app}$ (...) pour $\Im(kb) = -0,4i$ . . . . .	155
E.7	Différence relative $\epsilon$ en pourcent, entre $Z_r$ pour $n$ HM et $Z_r$ pour $n + 1$ HM, pour $\Im(kb) = -0,4i$ . . . . .	155
E.8	Impédance de rayonnement mode plan $Z_r$ avec l'influence de 0 (piston plan — — —) et de 5 modes non plans (—) ainsi que l'approximation $Z_{app}$ (...) pour $\Im(kb) = -1i$ . . . . .	156
E.9	Différence relative $\epsilon$ en pourcent, entre $Z_r$ pour $n$ HM et $Z_r$ pour $n + 1$ HM, pour $\Im(kb) = -i$ . . . . .	156
E.10	Impédance de rayonnement mode plan $Z_r$ avec l'influence de 0 (piston plan — — —) et de 5 modes non plans (—) ainsi que l'approximation $Z_{app}$ (...) pour $\Im(kb) = -2i$ . . . . .	157
E.11	Différence relative $\epsilon$ en pourcent, entre $Z_r$ pour $n$ HM et $Z_r$ pour $n + 1$ HM, pour $\Im(kb) = -2i$ . . . . .	157
E.12	Impédance de rayonnement mode plan $Z_r$ avec l'influence de 0 (piston plan — — —) et de 5 modes non plans (—) ainsi que l'approximation $Z_{app}$ (...) pour $\Im(kb) = -3i$ . . . . .	158
E.13	Différence relative $\epsilon$ en pourcent, entre $Z_r$ pour $n$ HM et $Z_r$ pour $n + 1$ HM, pour $\Im(kb) = -3i$ . . . . .	158
E.14	Impédance de rayonnement du mode plan $Z_r$ avec l'influence de 5 modes non plans. . . . .	159
F.1	Correction de longueur obtenue avec l'ancienne formulation F.1 (pointillé bleu) et avec la nouvelle F.2 (en trait plein rouge). . . . .	161
G.1	Nombre d'onde $k_{00}^j$ dans le cas avec (o) et sans (*) pertes visco-thermiques, pour un cylindre de longueur $L = 1m50$ . . . . .	163
G.2	Pourcentage dû aux pertes visco-thermiques par rapport aux pertes par rayonnement $((k_{sanspertes} - k_{avecpertes})/k_{sanspertes})$ , sur la partie réelle (en haut) et sur la partie imaginaire (en bas) des résonances d'un tuyau de longueur $L = 1m50$ . . . . .	164

# Bibliographie

- [1] D. Bernoulli. *Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'académie de 1747 et 1748. Dans l'Histoire de l'académie royale de Berlin*. Berlin, 1753.
- [2] Euler. *Dissertatio physica de sono*. Reprinted in Opera Omnia : Series 3, Volume 1, pp. 183 - 196, 1727.
- [3] J. D'Alembert. *Mémoires de l'académie royale de Prusse*. Berlin, 1746-1750.
- [4] Lord Rayleigh. *The theory of sound (volume 2)*. Dover, New York, 1945.
- [5] Y. Nomura, I. Yamamura, and S. Inawashiro. On the acoustic radiation from a flanged circular pipe. *Journal of the Physical Society of Japan*, 15 :510–517, 1960.
- [6] A.N. Norris and I.C. Sheng. Acoustic radiation from a circular pipe with an infinite flange. *Journal of Sound and Vibration*, 135(1) :85–93, 1989.
- [7] H. Levine and J. Schwinger. On the radiation of sound from an unflanged circular pipe. *Physical Review*.
- [8] W.E. Zorumski. Generalized radiation impedances and reflection coefficients of circular and annular ducts. *J. Acoust. Soc. Am.*, 54 :1667–1673, 1973.
- [9] V. Pagneux, N. Amir, and J. Kergomard. A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. part ii. results. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101 :2504–2517, 1997.
- [10] N. Amir and H. Matzner. The acoustics of flanged cylindrical pipe, examining the influence of higher order modes. *Acta Acustica united with Acustica*, 90 :1–7, 2004.
- [11] V. Debut. *Deux études d'un instrument de musique de type clarinette : Analyse des fréquences propres du résonateur et calcul des auto-oscillations par décomposition modale*. PhD thesis, Université de la Méditerranée Aix-Marseille II, 2004.
- [12] J. Kergomard, V. Debut, and D. Matignon. Resonance modes in one-dimensional medium with two purely resistive boundaries : Calculation methods, orthogonality, and completeness. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119 :1356–1367, 2006.
- [13] P. Filippi, D. Habault, J.P. Lefebvre, and A. Bergassoli. *Acoustics, Basic physics, theory and methods*. Academic Press, 1999.
- [14] Potel C. and Bruneau M. *Acoustique générale*. Ellipses, 2006.

- [15] J. Kergomard. Calculation of discontinuities in waveguides using mode-matching method : an alternative to the scattering matrix approach. *J. Acoustique*, 4 :111–138, 1991.
- [16] A. Roure. *Propagation guidée, étude des discontinuités*. PhD thesis, Université de la Méditerranée Aix-Marseille, 1976.
- [17] V. Pagneux, N. Amir, and J. Kergomard. A study of wave propagation in varying cross-section waveguides by modal decomposition. part i. theory and validation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100 :2034–2048, 1996.
- [18] P.M. Morse. *Vibration and Sound*. McGraw-Hill, New-York, 1948.
- [19] B. Mallaroni, P.-O. Mattei, and J. Kergomard. Complex resonance frequencies of a finite, circular radiating duct with an infinite flange. (disponible sur le serveur hal : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00402870/>).
- [20] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1968.
- [21] G.N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge U. P., 1962.
- [22] W. Appel. *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. H-K Editions, 2ème édition, 2002.
- [23] M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics (Part I)*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [24] F. Silva, Ph. Guillemain, J. Kergomard, B. Mallaroni, and A.N. Norris. Approximation formulae for the acoustic radiation impedance of a cylindrical pipe. *Journal of Sound and Vibration*, 322 :255–263, 2009.
- [25] F. Silva. *Emergence des auto-oscillations dans un instrument de musique à anche simple*. PhD thesis, Université de Provence Aix-Marseille 1, 2009.
- [26] Yudell L. Luke. *Mathematical fonctions and their approximations*. Academic Press, New York, 1975.
- [27] P. Filippi. *Theoretical Acoustics and Numerical Techniques*. Springer Verlag Wien-New York, 1983.
- [28] Norme internationale Deuxieme édition CEI/IEC 268-5 1989.
- [29] H. Schenck. Improved integral formulation for acoustic radiation problems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 44 :41–58, 1968.
- [30] A. H. Benade. *Fundamentals of Musical Acoustics*. Oxford University Press, Londres, 1976.
- [31] J. Kergomard et A. Chaigne. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [32] R. W. Pyle Jr. Effective length of horns. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57 :1309–1317, 1975.
- [33] J.-P. Dalmont, C. J. Nederveen, and N. Joly. Radiation impedance of tubes ended with different flanges : Numerical and experimental investigations. *Journal of Sound and Vibration*, 244 :505–534, 2001.

- [34] J. C. Le Roux. *Le haut-parleur électrodynamique : estimation des paramètres électroacoustiques aux basses fréquences et modélisation de la suspension*. PhD thesis, Université de Nantes, 1994.
- [35] M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical acoustics*. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [36] Jahnke E. and Emde F. *Tables of functions with formulae and curves*. Dover, 4th edition, 1945.
- [37] W.Shao and C.K. Mechefske. Analysis of radiation impedances of finite cylindrical ducts. *Journal of Sound and Vibration*, 286 :363–381, 2005.
- [38] A. M. Bruneau, M. Bruneau, P. Herzog, and J. Kergomard. Boundary layer attenuation of higher order modes in waveguides. *Journal of Sound and Vibration*, 119 :15–27, 1987.
- [39] A. M. Bruneau, M. Bruneau, P. Herzog, and J. Kergomard. On the propagation constant of higher order modes in a cylindrical waveguide. *Journal of Sound and Vibration*, 126 :178–181, 1988.
- [40] G. Kirchhoff. Ueber die einfluss der wärmeleitung in einem gase auf die schallbewegung (english translation 1974 in physical acoustics, r. b. lindsay, editor. stroudsburg : Dowden, hutchinson and ross). *Annalen der Physik Leipzig*, 134 :177–193, 1868.









## RÉSUMÉ

**Titre : Relation entre la géométrie d'un résonateur de longueur finie et son rayonnement. Étude numérique et expérimentale de ses résonances complexes.**

Le but principal de ce travail était de développer un outil numérique permettant de décrire le couplage entre le fluide interne et le fluide externe d'un résonateur de longueur finie, afin d'étudier le lien existant entre la géométrie du résonateur et son rayonnement.

Pour cela nous nous sommes attachés à l'étude des résonances complexes, correspondant aux pôles de la fonction de Green du système couplé avec le milieu extérieur. La partie imaginaire des fréquences de résonance est ici directement reliée aux pertes dues au rayonnement. Nous avons basé notre travail sur trois grands axes : une étude analytique à l'aide d'une théorie modale avec la prise en compte des modes non plans, le développement d'une méthode numérique basée sur les éléments finis de frontière ainsi qu'une confrontation expérimentale de nos résultats théoriques.

La théorie modale analytique nous a permis d'étudier le rayonnement de résonateurs cylindriques de longueur finie débouchant dans un écran infini, ce qui constitue un cas de référence pour la suite de l'étude. La méthode numérique développée dans un code Fortran parallélisé nous a donné la possibilité d'étudier des résonateurs de géométries plus complexes telles que celles des pavillons. Afin de réduire le temps de calcul, nous avons introduit une méthode hybride utilisant la théorie modale pour décrire la partie conservative du système, permettant des calculs rapides, et une méthode d'éléments finis de frontière, qui permet une représentation précise des géométries complexes, pour décrire la partie rayonnante. Les premiers résultats, concernant les résonances d'un système constitué d'un cylindre et d'un pavillon, ont pu être comparés aux mesures obtenues avec notre montage expérimental dans le cas du pavillon de Bessel et du pavillon conique.

**Mots clés :** théorie modale, BEM, matrices de transmission, rayonnement, résonances complexes, fonction de Green, résonateur de longueur finie, instruments à vent, pavillon.

## ABSTRACT

**Title : Relation between the shape and radiation of a finite length resonator. Numerical and experimental study of his complex resonances.**

The principal goal of this work was to develop a numerical method to study the coupling between internal and external fluid of a resonator, notably to study the link between the shape of a finite length resonator and his radiation.

For this we study complex resonances, corresponding to the poles of the Green's function of system coupled with the external environment. The imaginary part of resonance frequencies is here directly related to losses due to radiation. We based our work on three main areas : an analytical study using a modal theory with the inclusion of non-planar modes, the development of a numerical method based on boundary finite elements and an experimental comparison of our theoretical results.

The analytical modal theory has allowed us to study the radiation of finite length cylindrical pipe opening into an infinite screen, which is a reference case for further study. The numerical method, developed in a Fortran parallelized code, gave us the opportunity to study resonators with more complex geometries such as horns. To reduce computation time, we introduced an hybrid method mixing modal theory to describe the conservative part of system, that allows fast computation, and boundary element method, allowing a fine representation of complex geometries, to describe the radiating part. We have finished this work with a first experimental validation of results.

**Keywords :** modal theory, BEM, transmission matrices, radiation, complex resonances, Green's function, finite resonator, wind instruments, horn.